

Ina Kurth

**Homotopiegruppen mit Koeffizienten
für c.s.s.-Komplexe**

Frankfurt am Main 1963

Homotopiegruppen mit Koeffizienten
für c.s.s.-Komplexe

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Johann-Wolfgang-Goethe-Universität
Frankfurt am Main

vorgelegt

von

Ina Kurth
aus Berlin

1963



Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Universität Frankfurt am Main

Dekan: Prof. Dr. Theodor Wieland

1. Referent: Priv.-Doz. Dr. Friedrich Wilhelm Bauer
2. Referent: Prof. Dr. Wolfgang Franz

Tag der mündlichen Prüfung: 23./24.7.1963

<u>Inhalt</u>	Seite
Einleitung	1
I. <u>Homotopiegruppen mit Koeffizienten für Kan-Komplexe</u>	13
1. Grundlagen	13
2. Der Komplex $K([r]; p_1, \dots, p_s)$ und die Homotopiegruppen $\pi_n(K, \psi; G)$	19
3. Aussagen über die Gruppenstruktur in $\pi_n(K, \psi; G)$	30
4. Die Abhängigkeit der Homotopiegruppen von (K, ψ)	41
5. Die Abhängigkeit der Homotopiegruppen von der Koeffizientengruppe G	48
6. Homotopiegruppen und Ko-Moore-Komplexe	63
II. <u>Homotopiegruppen mit Koeffizienten für beliebige c.s.s.-Komplexe</u>	78
7. Grundlagen	78
8. Homotopiegruppen mit Koeffizienten für eineckige c.s.s.-Komplexe	81
III. <u>Relative Homotopiegruppen mit Koeffizienten</u>	83
9. Die ganzzahligen relativen Homotopiegruppen	83
10. Relative Homotopiegruppen mit Koeffizienten	95
IV. <u>Die Katutaschen Homotopiegruppen und der natürliche Isomorphismus λ_*</u>	97
11. Grundlagen	98
12. Die Homotopiegruppen $\hat{\pi}_n(K, \psi; G)$ und λ_*	100
Literaturverzeichnis	125



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546708_0052

Einleitung

Homotopiegruppen für topologische Räume mit Basispunkt sind von W.Hurewicz 1935 eingeführt worden [9].

1958 hat D.M.Kan in [2] eine Definition der Homotopiegruppen für c.s.s.-Komplexe gegeben, welche nur die semisimpliziale Struktur des Komplexes benutzt und unabhängig ist von der topologischen Realisierung. Damit ist die Berechnung der Homotopiegruppen als rein kombinatorisches Problem gekennzeichnet worden.

Etwa zur gleichen Zeit ist die Frage untersucht worden, ob sich für topologische Räume die von W.Hurewicz gegebene Definition der Homotopiegruppen auch, ähnlich wie bei den Homologiegruppen, für vorgegebene abelsche Gruppe G als Koeffizientenbereich aussprechen lässt. Das ist auf verschiedene Weisen möglich, z.B. durch die von B.Eckmann und P.J.Hilton 1958 in [7] gegebene Definition oder durch die Überlegungen von Y.Katuta [4] (1960).

Das Ziel dieser Arbeit ist es nun, entsprechend der von D.M.Kan für die gewöhnlichen Homotopiegruppen gegebenen Definition, den oben zitierten topologischen Definitionen von Homotopiegruppen mit Koeffizienten eine rein kombinatorische Definition für c.s.s.-Komplexe gegenüberzustellen.

Die Hurewicz-Definition ist klassisch und kann ausführlich z.B. in [9] nachgelesen werden.

Die Kansche Definition wird im wesentlichen in zwei Schritten vollzogen. Im ersten wird mit Hilfe einer gewissen Erweiterungsbedingung die Kategorie $\mathfrak{K}$ der Kan-Komplexe in der Kategorie der c.s.s.-Komplexe ausgezeichnet und gezeigt, dass in $\mathfrak{K}$ eine rein kombinatorische Definition der Homotopiegruppen möglich ist. Im zweiten Schritt wird dann bewiesen, dass damit auch für beliebige c.s.s.-Komplexe eine kombinatorische Definition der Homotopiegruppen gegeben ist, da man jedem zusammenhängenden c.s.s.-Komplex K einen Kan-Komplex GK zuordnen kann, so dass für $K \in \mathfrak{K}$ die n -te Homotopiegruppe $\pi_n(K, \psi)$ von K isomorph ist zu der $(n-1)$ -ten Homotopiegruppe $\pi_{n-1}(GK, e_0)$ von GK .

Durch die Festsetzung $\pi_n(K, \psi) = \pi_{n-1}(GK, e_0)$ für $n > 0$ sind dann die Homotopiegruppen für einen beliebigen zusammenhängenden c.s.s.-Komplex K auf kombinatorischem Wege erklärt.

Bei der Definition von Homotopiegruppen mit Koeffizienten hat man in jedem Falle so zu verfahren, dass $\pi_n(X, x)$ (die gewöhnlichen Homotopiegruppen ohne Koeffizienten) gerade die Homotopiegruppen $\pi_n(X, x; \mathbb{Z}_\infty)$ werden. Darauf wird man geführt durch die Betrachtung des Hurewicz-Satzes, nach welchem unter den bekannten

Bedingungen die Homotopiegruppe $\pi_n(X, x)$ zu der ganzzahligen singulären Homologiegruppe $H_n(X)$ isomorph ist.

Die verschiedenen Definitionen von Homotopiegruppen mit Koeffizienten hängen wesentlich davon ab, wie man das Auftreten der Koeffizientengruppe Z_∞ bei den gewöhnlichen Homotopiegruppen deutet.

So wird z.B. in [4] davon ausgegangen, dass die n -Sphäre S^n ein Ko-Moore-Raum $P(Z_\infty, n)$ ist, d.h., dass $H^\nu(S^n) = 0$ für $\nu \neq n$ und $H^n(S^n) \approx Z_\infty$.

Ist dann G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe vom Rang r mit den invarianten Koeffizienten $p_1, \dots, p_s$, so wird für $n = 2$ ein Ko-Moore-Raum $P(G, 2)$ konstruiert, d.h. ein Polyeder mit der Eigenschaft $H^\nu(P(G, 2)) = 0$ für $\nu \neq 2$ und $H^2(P(G, 2)) \approx G$. $P(G, 2)$ ist die Einpunktvereinigung von r 2-Sphären S^2 und s 2-Elementen $B_{p_i}^2$ $i = 1, \dots, s$, deren Rand unter der Abbildung $S_{p_i}: S^1 \longrightarrow S^1$ mit $S_{p_i}(e^{j\theta}) = (e^{j p_i \theta})$ identifiziert wird. $P(G, n)$ wird definiert als die $(n-2)$ -fache reduzierte Einhängung von $P(G, 2)$.

Entsprechend den gewöhnlichen Homotopiegruppen sind dann für einen beliebigen topologischen Raum X mit Basispunkt x die Elemente der n -ten Homotopiegruppe $\pi_n(X, x; G)$ in [4] gegeben durch die Homotopieklassen der stetigen Abbildungen f des Ko-Moore-Komplexes $(P(G, n), \phi)$ in (X, x) .

Es gibt nun eine Äquivalenz zwischen der Menge $\Pi(P(G,n), \phi), (X,x)$ der Homotopieklassen der stetigen Abbildungen f und der Homotopiegruppe $\pi_{n-2}(X^{P(G,2)}, \hat{x})$ des Funktionalraumes $X^{P(G,2)}$ mit dem Basispunkt $\hat{x}(P(G,2)) = x$. Auf diese Weise hat man in der Menge $\Pi(P(G,n), \phi), (X,x)$ automatisch eine Gruppenstruktur.

In dieser Definition liegt ein wesentlicher Nachteil der Katutaschen Konstruktion, da die Gruppenstruktur in $\pi_n(X,x;G)$ nicht unmittelbar erklärt wird.

Wir wollen nun Homotopiegruppen mit Koeffizienten erklären, so dass für jeden c.s.s.-Komplex K mit Basispunkt ψ eine eindeutige Beziehung besteht zwischen den Elementen der Homotopiegruppe $\pi_n(K, \psi; G)$ und den Homotopieklassen der c.s.s.-Abbildungen f eines Ko-Moore-Komplexes $(P(G,n), \phi)$ in (K, ψ) .

Homotopiegruppen mit Koeffizienten sind für verschiedene Fragen von Bedeutung, z.B. benötigt man sie zur Beschreibung der dualen Postnikovsysteme, die den Homotopietyp eines Polyeders mit Hilfe seiner Kohomologiegruppen und gewisser Homotopieklassen mit Koeffizienten in den Kohomologiegruppen charakterisieren [8].

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt: Im ersten Kapitel wird für die Kategorie $\mathfrak{K}$ der Kan-Komplexe eine kombinatorische Definition von Homotopiegruppen mit Koeffizienten gegeben und diese auf ihre

Eigenschaften hin untersucht. Im zweiten Kapitel wird dann gezeigt, wie sich die Definition auf beliebige c.s.s.-Komplexe übertragen lässt und im dritten werden relative Homotopiegruppen mit Koeffizienten eingeführt. Das vierte Kapitel dient dazu, die oben angeführte Definition von Y. Katuta von Homotopiegruppen mit Koeffizienten für topologische Räume mit kombinatorischen Hilfsmitteln für c.s.s.-Komplexe auszusprechen und die natürliche Isomorphie dieser semisimplizialen Beschreibung der Katutaschen Homotopiegruppen zu den neu definierten Homotopiegruppen mit Koeffizienten nachzuweisen.

Jedem Kapitel ist, sofern notwendig, ein Abschnitt Grundlagen vorangestellt, in welchem kurz alle in diesem Kapitel benutzten, allgemein bekannten Definitionen und Sätze aus der Theorie der c.s.s.-Komplexe zusammengestellt sind.

Betrachten wir nun die einzelnen Kapitel:

I. Homotopiegruppen mit Koeffizienten für Kan-Komplexe

Jedem Paar $(K, \psi) \in \mathfrak{K}$ wird in 2. in Abhängigkeit von dem Invariantensystem $(r; p_1, \dots, p_s)$ einer endlich erzeugten abelschen Gruppe G ein Kan-Komplex mit Basispunkt $(K([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\psi})$ zugeordnet.

Die n -Simplexe von $K([r]; p_1, \dots, p_s)$ sind $(r+s)$ -Tupel von $(n+3)$ -dimensionalen Simplexfolgen aus K mit speziellen Seitenbedingungen ($[p, n]$ -Ketten).

Mit Hilfe des Paares $(K([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\psi})$ werden die Homotopiegruppen von (K, ψ) mit Koeffizienten in G dann folgendermassen definiert:

Definition (2.8): Ist (K, ψ) ein Kan-Komplex mit Basispunkt und G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe mit dem Invariantensystem $(r; p_1 \dots p_s)$, so setzt man für $n \geq 3$

$$\pi_n(K, \psi; G) = \pi_{n-3}(K([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\psi}) \cdot$$

Es gilt:

Für $G = \mathbb{Z}_\infty$ ist die Definition (2.8) zu der Kanschen Definition der Homotopiegruppen $\pi_n(K, \psi)$ aus [2] äquivalent.

In den Teilen 3., 4. und 5. werden verschiedene Eigenschaften der neuen Homotopiegruppen nachgewiesen:

In 3. beschäftigen wir uns zunächst mit Aussagen über die Gruppenstruktur in $\pi_n(K, \psi; G)$. So z.B. in

Satz (3.2): $\pi_n(K, \psi; G)$ ist abelsch für $n \geq 4$.

Für $n > 4$ folgt die Behauptung direkt aus der entsprechenden Eigenschaft der Kanschen Homotopiegruppen für $n > 1$, während man für $n = 4$ spezielle Eigenschaften des Komplexes $K([r]; p_1, \dots, p_s)$ zu Hilfe nehmen muss.

Eine für viele Beweise wichtige Eigenschaft der Homotopiegruppen $\pi_n(K, \psi; G)$ liefert der folgende

Satz (3.3): Lässt sich die Gruppe G darstellen als di-

rekte Summe der endlich erzeugten abelschen Gruppen G_i , so gilt für $n \geq 4$

$$\pi_n(K, \psi; G) \approx \sum \circ \pi_n(K, \psi; G_i)$$

Diese Zerlegung ist natürlich.

In 4. wird die Abhängigkeit der Homotopiegruppen von den Paaren (K, ψ) untersucht. Es handelt sich dabei stets um Eigenschaften, die für die Kanschen Homotopiegruppen gültig sind und sich nun auch auf die Homotopiegruppen mit Koeffizienten übertragen.

So wird z.B. in Satz (4.1) bewiesen, dass für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe G $\pi_n(*, *, G)$ ein Funktor ist von $\mathcal{K}$ in die Kategorie $\mathcal{U} = \{H, h\}$ der Gruppen und Homomorphismen, wobei homotope c.s.s.-Abbildungen $f, g: (K, \psi) \longrightarrow (L, \phi)$ denselben Homomorphismus $f_{\#} = g_{\#}: \pi_n(K, \psi; G) \longrightarrow \pi_n(L, \phi; G)$ induzieren.

Ferner wird in Satz (4.2) gezeigt, dass für jede Fasersequenz $(F, \phi) \xrightarrow{q} (E, \chi) \xrightarrow{p} (B, \psi)$ und jede endlich erzeugte abelsche Gruppe G ein Randhomomorphismus $\partial_n: \pi_n(B, \psi; G) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, \phi; G)$ für $n > 3$ existiert, so dass die zugehörige Homotopiesequenz

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\partial_{n+1}} \pi_n(F, \phi; G) \xrightarrow{q_{\#}} \pi_n(E, \chi; G) \xrightarrow{p_{\#}} \pi_n(B, \psi; G) \xrightarrow{\partial_n} \\ &\xrightarrow{\partial_n} \pi_{n-1}(F, \phi; G) \xrightarrow{q_{\#}} \dots \end{aligned}$$

exakt ist.

In 5. wird die Abhängigkeit der Homotopiegruppen

von der Koeffizientengruppe G untersucht. Dabei werden wesentlich zwei Fragen behandelt:

1. die Existenz eines induzierten Homomorphismus

$$\# \varphi : \pi_n(K, \varphi; G_1) \longrightarrow \pi_n(K, \varphi; G_2)$$

zu einem vorgegebenen Homomorphismus $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$.

($\# \varphi$ hängt nicht nur von φ sondern auch von den in G_1 und G_2 gewählten Basen ab)

2. die universelle Koeffizientenformel für $\pi_n(K, \varphi; G)$.

Die Hauptlast bei der Definition von $\# \varphi$ liegt in der Konstruktion eines natürlichen Homomorphismus $\bar{h}$ in den folgenden drei Fällen:

$$(1) \bar{h} : \pi_n(K, \varphi; Z_\infty) \longrightarrow \pi_n(K, \varphi; Z_p)$$

$$(2) \bar{h} : \pi_n(K, \varphi; Z_q) \longrightarrow \pi_n(K, \varphi; Z_p) \quad \text{für } p=m \cdot q$$

$$(3) \bar{h} : \pi_n(K, \varphi; Z_q) \longrightarrow \pi_n(K, \varphi; Z_p) \quad \text{für } q=m \cdot p$$

Fall (1) und (2) sind leicht zu übersehen, während der Fall (3) einige technische Schwierigkeiten bereitet.

Die universelle Koeffizientenformel lautet:

Satz (5.5): Für $n > 3$ existiert eine natürliche exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \pi_n(K, \varphi) \otimes G \longrightarrow \pi_n(K, \varphi; G) \longrightarrow \pi_{n-1}(K, \varphi) * G \longrightarrow 0$$

Zu ihrem Beweis genügt es wegen Satz (3.3) die beiden Fälle $G = Z_\infty$ und $G = Z_p$ zu betrachten. Für $G = Z_\infty$ ist die Behauptung trivial und für $G = Z_p$ kann die Existenz

einer natürlichen exakten Koeffizientensequenz

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\partial_{\#}} \pi_n(K, \psi; Z_{\infty}) \xrightarrow{p} \pi_n(K, \psi; Z_{\infty}) \xrightarrow{\bar{h}} \pi_n(K, \psi; Z_p) \xrightarrow{\partial_{\#}} \\ &\xrightarrow{\partial_{\#}} \pi_{n-1}(K, \psi; Z_{\infty}) \xrightarrow{p} \dots \end{aligned}$$

nachgewiesen werden, aus der sich die universelle Koeffizientenformel dann leicht ablesen lässt.

In Teil 6. konstruieren wir zunächst entsprechend dem in [4] definierten Ko-Moore-Raum $P(G, n)$ für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe G einen Ko-Moore-Komplex $P(G, n)$. Mit Hilfe dieses Ko-Moore-Komplexes beweisen wir dann den

Satz (6.4): Bezeichnet man mit ϕ die einzige Ecke

$(0, \dots, 0, [1, p_1, 0, 0, 0])$ von $P(G, n)$, so gilt:

Für $n \geq 3$ und einen beliebigen Kan-Komplex K mit Basispunkt ψ besteht eine eindeutige Zuordnung h zwischen den Abbildungsklassen

$\pi[(P(G, n), \phi), (K, \psi)]$ der c.s.s.-Abbildungen

$f: (P(G, n), \phi) \longrightarrow (K, \psi)$ und den Elementen von

$\pi_n(K, \psi; G)$.

II. Homotopiegruppen mit Koeffizienten für beliebige c.s.s.-Komplexe

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass auch für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe G durch die

Definition (8.1): Sei K ein eineckiger c.s.s.-Komplex

mit Ecke ψ und G eine endlich erzeugte abel-

sche Gruppe mit den Invarianten $(r; p_1 \dots p_s)$.

Dann setzt man für $n \geq 4$

$$\pi_n(K, \psi; G) = \pi_{n-1}(GK, e_0; G)$$

die kombinatorische Definition der Homotopiegruppen mit Koeffizienten auf beliebige eineckige (und damit beliebige zusammenhängende) c.s.s.-Komplexe erweitert wird, da für jeden Kan-Komplex die Definitionen (2.8) und (8.1) äquivalent sind.

Dabei ist GK der oben erwähnte, in [2] zu K konstruierte Kan-Komplex.

III. Relative Homotopiegruppen mit Koeffizienten

Ist $\mathcal{K}' = \{(K, L, \psi); f\}$ die Kategorie der Tripel (K, L, ψ) (K ein Kan-Komplex, L ein Teilkomplex von K, der ebenfalls der Kan-Bedingung genügt, ψ eine Ecke aus L) und der c.s.s.-Abbildungen $f: (K, L, \psi) \longrightarrow (M, N, \phi)$, so liegt mit jedem Tripel $(K, L, \psi) \in \mathcal{K}'$ auch $(K([r]; p_1 \dots p_s), L([r]; p_1 \dots p_s), \bar{\psi})$ in $\mathcal{K}'$.

Ausserdem induziert genau wie im absoluten Fall jede c.s.s.-Abbildung $f: (K, L, \psi) \longrightarrow (M, N, \phi)$ eine c.s.s.-Abbildung $\bar{f}: (K([r]; p_1 \dots p_s), L([r]; p_1 \dots p_s), \bar{\psi}) \longrightarrow (M([r]; p_1 \dots p_s), N([r]; p_1 \dots p_s), \bar{\phi})$, so dass homotope Abbildungen wieder homotope Abbildungen induzieren und Fasersequenzen in Fasersequenzen übergehen.

Deshalb geben wir zunächst eine kombinatorische Definition der gewöhnlichen relativen Homotopiegruppen und untersuchen die Eigenschaften derselben.

Die relativen Homotopiegruppen mit Koeffizienten erhalten wir dann entsprechend Kapitel I durch die Definition (10.1): Sei (K, L, ψ) ein Tripel aus $\mathfrak{A}'$

und G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe mit den Invarianten $(r; p_1 \dots p_s)$, so setzt man für $n \geq 4$

$$\pi_n(K, L, \psi; G) = \pi_{n-3}(K([r]; p_1 \dots p_s), L([r]; p_1 \dots p_s), \bar{\psi})$$

Die Sätze (9.7) bis (9.11) übertragen sich bis auf gewisse Verschiebungen in der Dimension wörtlich auf die relativen Homotopiegruppen mit Koeffizienten.

IV. Die Beziehung zu den Katutaschen Homotopiegruppen und der natürliche Isomorphismus $\lambda_\#$

Wir betrachten zunächst für den in 6. definierten Ko-Moore-Komplex $P(G, 2)$ zu jedem Paar (K, ψ) den Funktionalkomplex $K^{P(G, 2)}$ und beweisen, dass die Homotopiegruppen

$$\hat{\pi}_n(K, \psi; G) = \pi_{n-2}(K^{P(G, 2)}, \hat{\psi}) \quad \text{und}$$

$$\pi_n(K, \psi; G) = \pi_{n-3}(K([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\psi})$$

in natürlicher Weise isomorph sind.

Aufgrund der Ergebnisse von 6. ist damit eine

kombinatorische Definition der Katutaschen Homotopiegruppen für c.s.s.-Komplexe gegeben und gleichzeitig ist gezeigt, dass diese Darstellung zu den hier neu definierten Homotopiegruppen mit Koeffizienten in natürlicher Weise isomorph ist.

Der Beweis dieser Isomorphie basiert auf den drei Lemmatas (12.5), (12.6) und (12.7).

Offen ist bei unseren Betrachtungen genau wie bei den Katutaschen in [4] die Frage, wie man zu allgemeineren Koeffizientengruppen G als den endlich erzeugten abelschen Gruppen kommt.

Für Anregung und Förderung dieser Arbeit bin ich Herrn Privatdozenten Dr.F.W.Bauer zu Dank verpflichtet.

I. Homotopiegruppen mit Koeffizienten für Kan-Komplexe

1. Grundlagen

Im folgenden Abschnitt wird zunächst eine Zusammenstellung der Grundbegriffe aus der Theorie der c.s.s.-Komplexe gegeben, soweit sie im ersten Teil der Arbeit Verwendung finden. Danach folgt kurz die Definition der Kantschen Homotopiegruppen für c.s.s.-Komplexe mit Erweiterungsbedingung (Kan-Bedingung).

1.1. c.s.s.-Komplexe und Kan-Bedingung [2]

Ein c.s.s.-Komplex K ist eine Menge von Elementen σ , den Simplexen von K , welche so mit einer Dimension $n \geq 0$ versehen sind, dass für jedes n -Simplex $\sigma \in K$ und jede ganze Zahl i mit $0 \leq i \leq n$ zwei Simplexe in K definiert sind:

(1) das $(n-1)$ -Simplex $\sigma \varepsilon^i$ (die i -te Seite von σ)

(2) das $(n+1)$ -Simplex $\sigma \gamma^i$ (die i -te Entartung von σ).

Die Operatoren ε^i und γ^i genügen dabei den folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} \varepsilon^i \varepsilon^{j-1} &= \varepsilon^j \varepsilon^i & i < j \\ \gamma^i \gamma^j &= \gamma^{j-1} \gamma^i & i < j \\ \gamma^j \varepsilon^i &= \begin{cases} \varepsilon^i \gamma^{j-1} & i < j \\ \text{Identität} & i = j, j+1 \\ \varepsilon^{i-1} \gamma^j & i > j+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Menge aller n -Simplexe aus K bezeichnet man mit K_n .

Ein c.s.s.-Komplex K heisst zusammenhängend, wenn für je zwei Ecken $\gamma, \gamma \in K_0$ eine Folge $(\sigma_0, \dots, \sigma_r)$ von 1-Simplexen σ_i in K existiert, sodass

$$\begin{aligned}\sigma_0 \varepsilon^0 &= \gamma \\ \sigma_i \varepsilon^1 &= \sigma_{i+1} \varepsilon^0 \quad i = 0, \dots, r-1 \\ \sigma_r \varepsilon^1 &= \gamma\end{aligned}$$

Im folgenden werden stets zusammenhängende c.s.s.-Komplexe betrachtet.

Es sei (k, n) ein Paar ganzer Zahlen mit $0 \leq k \leq n$. Die n Simplexe $\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n \in K_{n-1}$ bilden eine (k, n) -Tüte, wenn für alle Paare (i, j) mit $i < j$ und $i \neq k \neq j$ gilt $\sigma_i \varepsilon^{j-1} = \sigma_j \varepsilon^i$.

Ein Simplex $\sigma \in K_n$ heisst eine Ausfüllung der (k, n) -Tüte $\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n$, wenn für alle i, k die Beziehung $\sigma \varepsilon^i = \sigma_i$ besteht.

Ein c.s.s.-Komplex K genügt der Kan-Bedingung, wenn für jede (k, n) -Tüte in K ($0 \leq k \leq n$, $n = 0, 1, 2, \dots$) wenigstens eine Ausfüllung in K existiert. Ein c.s.s.-Komplex, der der Kan-Bedingung genügt, heisst Kan-Komplex.

1.2. c.s.s.-Abbildungen und Fasersequenzen [2]

Eine c.s.s.-Abbildung $f : (K, \gamma) \longrightarrow (L, \phi)$ ist eine dimensionserhaltende Abbildung des c.s.s.-Komplexes K in den c.s.s.-Komplex L , welche den Basispunkt $\gamma \in K_0$ in den Basispunkt $\phi \in L_0$ abbildet und mit den Seiten- und Entartungsoperatoren vertauschbar ist, d.h. welche für jedes Simplex $\sigma \in K_n$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$f(\sigma \varepsilon^i) = (f\sigma) \varepsilon^i$$

$$0 \leq i \leq n$$

$$f(\sigma \gamma^i) = (f\sigma) \gamma^i$$

Eine c.s.s.-Abbildung $p: (E, X) \longrightarrow (B, Y)$ ist eine Faserabbildung, wenn für jede (k, n) -Tüte $\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n$ in E und jede Ausfüllung τ der (k, n) -Tüte $p\sigma_0, \dots, p\sigma_{k-1}, p\sigma_{k+1}, \dots, p\sigma_n$ in B eine Ausfüllung σ von $\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n$ in E existiert, sodass $p(\sigma) = \tau$.

Eine Folge $(F, \phi) \xrightarrow{q} (E, X) \xrightarrow{p} (B, Y)$ von c.s.s.-Abbildungen heisst eine Fasersequenz, wenn die nachstehenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) q ist monomorph

(2) für ein n -Simplex $\sigma \in E$ gilt $p(\sigma) = \gamma \gamma^0 \dots \gamma^{n-1}$

d.u.n.d., wenn ein n -Simplex $\tau \in F$ existiert, so dass $q(\tau) = \sigma$

(3) p ist eine Faserabbildung.

1.3. Standard- n -Simplex, kartesisches Produkt und homotope Abbildungen [3]

Für jedes $n \geq 0$ bezeichne $[n]$ die Zahlenfolge $(0, \dots, n)$.

Ist (i, n) ein Paar ganzer Zahlen mit $0 \leq i \leq n$, so definiert man die Abbildungen

$$\varepsilon_n^i : [n-1] \longrightarrow [n]$$

$$\gamma_n^i : [n+1] \longrightarrow [n]$$

$$\text{durch } \varepsilon_n^i(k) = \begin{cases} k & \text{für } k < i \\ k+1 & \text{für } k \geq i \end{cases}$$

$$\gamma_n^i(k) = \begin{cases} k & \text{für } k \leq i \\ k-1 & \text{für } k > i \end{cases}$$

Das Standard-n-Simplex $\Delta [n]$ ist dann der folgende c.s.s.-Komplex:

(1) die q-Simplexe von $\Delta [n]$ sind die Abbildungen

$$\alpha : [q] \longrightarrow [n] \text{ mit } \alpha(i) \leq \alpha(j) \text{ f\"ur } 0 \leq i < j \leq q$$

(2) f\"ur $0 \leq i \leq n$ ist $\alpha \varepsilon^i = \alpha \cdot \varepsilon_n^i$

$$\alpha \gamma^i = \alpha \cdot \gamma_n^i$$

Sind (K, ψ) und (L, ϕ) zwei c.s.s.-Komplexe mit Basispunkt, so ist das kartesische Produkt $(K \times L, (\psi, \phi))$ derjenige c.s.s.-Komplex, dessen n-Simplexe Paare $(\bar{\sigma}, \tau)$ mit $\bar{\sigma} \in K_n$ und $\tau \in L_n$ sind und dessen Seitenbildung und Entartung gegeben sind durch $(\bar{\sigma}, \tau) \varepsilon^i = (\bar{\sigma} \varepsilon^i, \tau \varepsilon^i)$

$$(\bar{\sigma}, \tau) \gamma^i = (\bar{\sigma} \gamma^i, \tau \gamma^i) .$$

Zwei c.s.s.-Abbildungen $f: (K, \psi) \longrightarrow (M, \chi)$ und

$g: (L, \phi) \longrightarrow (N, \varphi)$ induzieren eine c.s.s.-Abbildung

$f \times g: (K \times L, (\psi, \phi)) \longrightarrow (M \times N, (\chi, \varphi))$ mit

$$f \times g(\bar{\sigma}, \tau) = (f\bar{\sigma}, g\tau) .$$

Zwei c.s.s.-Abbildungen $f_0, f_1: (K, \psi) \longrightarrow (L, \phi)$

heissen homotop relativ ψ , wenn es eine c.s.s.-Abbildung $f: K \times \Delta[1] \longrightarrow L$ gibt, so dass

$$(1) f_0 = f \cdot 0_K$$

$$f_1 = f \cdot 1_K$$

$$\text{f\"ur } 0_K, 1_K: K \longrightarrow K \times \Delta[1]$$

$$\text{mit } 0_K(\bar{\sigma}) = (\bar{\sigma} \varepsilon_1^0 \gamma^0 \dots \gamma^{n-1})$$

$$1_K(\bar{\sigma}) = (\bar{\sigma} \varepsilon_1^1 \gamma^0 \dots \gamma^{n-1})$$

$$\bar{\sigma} \in K_n$$

(2) $f(\psi \gamma^0, \varepsilon_1) = \phi \gamma^0$, wobei $\varepsilon_1: [1] \longrightarrow [1]$ die Identit\"at ist.

1.4. Homotopiegruppen von Kan-Komplexen und die Homotopie- sequenz [2]

(K, ψ) sei ein Kan-Komplex mit Basispunkt. Mit ψ_n bezeichnet man das vollständig entartete n -Simplex über ψ , d.h. $\psi_n = \psi \gamma^0 \dots \gamma^{n-1}$.

Die Kanschen Homotopiegruppen $\pi_n(K, \psi)$ werden dann folgendermassen definiert:

Man betrachtet für jedes $n = 0, 1, 2, \dots$ die Menge $\Gamma_n(K, \psi) = \{ \sigma \in K_n / \sigma \varepsilon^i = \psi_{n-1} \quad i = 0, \dots, n \}$ aller Sphären der Dimension n in (K, ψ) . Ein Simplex $\sigma \in \Gamma_n(K, \psi)$ heisst homotop zu einem Simplex $\tau \in \Gamma_n(K, \psi)$, wenn ein Simplex $\xi \in K_{n+1}$ existiert, sodass

$$\begin{aligned} \xi \varepsilon^{n+1} &= \tau \\ \xi \varepsilon^i &= \sigma \\ \xi \varepsilon^i &= \psi_n \quad \text{für } i = 0, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Diese Homotopierelation erzeugt eine Klasseneinteilung in $\Gamma_n(K, \psi)$. Die Elemente von $\pi_n(K, \psi)$ sind die Klassen $[\sigma]$ von Simplexen $\sigma \in \Gamma_n(K, \psi)$.

Sind σ und τ zwei Simplexe aus $\Gamma_n(K, \psi)$ für $n \geq 1$, so bildet die Folge $(\underbrace{\psi_n, \dots, \psi_n}_{n-1 \text{ mal}}, \sigma, \tau)$ eine $(n, n+1)$ -Tüte in K .

Ist ξ eine beliebige Ausfüllung dieser Tüte, so ist die Seite $\xi \varepsilon^n$ bis auf Homotopie eindeutig bestimmt, und es lässt sich durch die Festsetzung $[\sigma] \cdot [\tau] = [\xi \varepsilon^n]$ eine Multiplikation der Klassen definieren, welche in $\pi_n(K, \psi)$ für $n \geq 1$ eine Gruppenstruktur erzeugt.

Jede c.s.s.-Abbildung $f : (K, \psi) \longrightarrow (L, \phi)$ induziert für $n \geq 1$ einen Homomorphismus $f_* : \pi_n(K, \psi) \longrightarrow \pi_n(L, \phi)$.

Für jede Fasersequenz $(F, \phi) \xrightarrow{q} (E, \chi) \xrightarrow{p} (B, \psi)$
 existiert ausserdem für $n \geq 1$ ein Homomorphismus

$\partial_n : \pi_n(B, \psi) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, \phi)$ und damit eine Folge

$$\begin{aligned} \dots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} \pi_n(B, \psi) \xrightarrow{q_*} \pi_n(E, \chi) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, \psi) \xrightarrow{\partial_n} \\ & \xrightarrow{\partial_n} \pi_{n-1}(F, \phi) \xrightarrow{q_*} \dots \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, \psi) \longrightarrow 1 \end{aligned}$$

die Homotopiesequenz von $(F, \phi) \xrightarrow{q} (E, \chi) \xrightarrow{p} (B, \psi)$.

2. Der Komplex $K([r]; p_1, \dots, p_n)$ und die Homotopiegruppen $\pi_n(K, \psi; G)$

Es sei (K, ψ) ein Kan-Komplex mit Basispunkt und G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe vom Rang r mit den invarianten Koeffizienten $p_1, \dots, p_n$ (p_i = Primzahlpotenz) [5].

Im folgenden soll nun untersucht werden, wie man aus K und dem Invariantensystem von G den Komplex $K([r]; p_1, \dots, p_n)$ gewinnt, dessen Kanische Homotopiegruppen in der Dimension n dann die $(n+3)$ -dimensionalen Homotopiegruppen von K mit Koeffizienten in G ergeben.

Dazu müssen zunächst einige Vorbetrachtungen angestellt werden.

Definition (2.1): Eine Folge $(S_1 \dots S_{p-1})$ von $(n+3)$ -Simplexten aus K ($n \geq 0$) heisst eine $[p, n]$ -Kette in (K, ψ) , wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

$$(K.1) \quad S_1 \varepsilon^{n+1} = S_j \varepsilon^{n+3} \quad j = 1, \dots, p-1$$

$$(K.2) \quad S_j \varepsilon^{n+2} = S_{j+1} \varepsilon^{n+1} \quad j = 1, \dots, p-2$$

$$(K.3) \quad S_{p-1} \varepsilon^{n+2} = \psi_{n+2} = \psi \gamma^0 \dots \gamma^{n+1}$$

Eine $[p, n]$ -Kette in (K, ψ) heisst einfach, wenn $S_1 \varepsilon^{n+1} = \psi_{n+2}$.

Für beliebiges p und n bildet die Folge $(\underbrace{\psi_{n+3} \dots \psi_{n+3}}_{p-1})$ eine einfache $[p, n]$ -Kette in (K, ψ) .

Es sollen nun einige grundlegende Eigenschaften der $[p, n]$ -Ketten in (K, ψ) nachgewiesen werden.

Lemma (2.2): (I) Ist $(S_1 \dots S_{p-1})$ eine $[p, n]$ -Kette in (K, ψ) , so gilt für jedes $i \leq n$

- (1) $(S_1 \varepsilon^i, \dots, S_{p-1} \varepsilon^i)$ ist eine $[p, n-1]$ -Kette in (K, ψ)
 (2) $(S_1 \eta^i, \dots, S_{p-1} \eta^i)$ ist eine $[p, n+1]$ -Kette in (K, ψ) .

(II) Ist $(S_1 \dots S_{p-1})$ einfach so sind auch $(S_1 \varepsilon^i, \dots, S_{p-1} \varepsilon^i)$ und $(S_1 \eta^i, \dots, S_{p-1} \eta^i)$ einfach.

Beweis: trivial.

Lemma (2.3): (I) Sind $(S_{01} \dots S_{0p-1}), \dots, (S_{k-1,1} \dots S_{k-1p-1}),$
 $(S_{k+1,1} \dots S_{k+1p-1}), \dots, (S_{n1} \dots S_{np-1})$ n $[p, n-1]$ -Ketten
 in (K, ψ) mit

$$S_{i1} \varepsilon^{j-1} = S_{j1} \varepsilon^i \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 \leq i < j \leq n \\ i \neq k \neq j \\ 1 = 1, \dots, p-1 \end{cases}$$

so existiert eine $[p, n]$ -Kette $(S_1 \dots S_{p-1})$ in (K, ψ)
 mit $S_1 \varepsilon^i = S_{i1}$ für $i \neq k$ $1 = 1, \dots, p-1$.

(II) sind die $[p, n-1]$ -Ketten $(S_{i1} \dots S_{ip-1})$
 für $i = 0, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ einfach, so ist auch die
 $[p, n]$ -Kette $(S_1 \dots S_{p-1})$ einfach.

Beweis: (I) Man betrachtet zunächst für jedes Paar (l, m)
 mit $l = 1, \dots, p-1$ und $m = 1, 2, 3$ die $(k, n+2)$ -Tüte

$$\sum_1^m = (S_{01} \varepsilon^{n-1+m} \dots S_{k-11} \varepsilon^{n-1+m}, S_{k+11} \varepsilon^{n-1+m} \dots \\ \dots S_{n1} \varepsilon^{n-1+m}, \psi_{n+1}, \psi_{n+1}) \text{ in } K.$$

Dabei gilt: (1) $\sum_1^1 = \sum_1^3$ $1 = 1, \dots, p-1$

$$(2) \sum_1^2 = \sum_{1+1}^1 \quad 1 = 1, \dots, p-2$$

$$(3) \sum_{p-1}^2 = (\psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1})$$

$\begin{matrix} & & o & & k-1 & & k+1 & & n+2 \end{matrix}$

Dann wählt man für jedes $\sum_1^m$ eine Ausfüllung

T_1^m in K und zwar so, dass $T_{1,1}^m = T_{1,2}^m$, wenn

$$\sum_{1,1}^m = \sum_{1,2}^m \text{ und } T_{p-1}^2 = \psi_{n+2}.$$

Mit den so gewonnenen Simplexen bildet man für

$1 = 1, \dots, p-1$ die $(k, n+3)$ -Tüten

$(S_{01} \dots S_{k-11}, S_{k+11} \dots S_{n1}, T_1^1, T_1^2, T_1^3)$ in K und

wählt für jede beliebige Ausfüllung S_1 in

K . Die Folge $(S_1 \dots S_{p-1})$ ist dann eine $[p, n]$ -Kette in (K, ψ) mit der geforderten Eigenschaft.

(II) Sind die $[p, n-1]$ -Ketten $(S_{i1} \dots S_{ip-1})$

$i = 0, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ einfach, so ist

$$\sum_1^1 = (\psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}). \text{ Es kann also}$$

$$T_1^1 = T_1^3 = \dots = T_{p-1}^3 = \psi_{n+2} \text{ gewählt werden und}$$

damit ist auch $(S_1 \dots S_{p-1})$ einfach.

In den nun folgenden Lemmatas werden zwei verschiedene Zerlegungen spezieller $[p, n+1]$ -Ketten in Paare von Simplexfolgen betrachtet. Für jedes der dabei entstehenden Zerlegungssimplexe ist die Anzahl der vollständig entarteten Seiten um eins grösser als für die Simplexe der ursprünglichen $[p, n+1]$ -Kette. Diese Zerlegungsfolgen werden also immer dann verwendet werden, wenn die zu untersuchende Dimension n so niedrig ist, dass die zugehörigen $[p, n+1]$ -Ketten

entweder überhaupt nicht definiert werden können oder für die Beweise unbrauchbar sind, da sie nicht genügend vollständig entartete Seitensimplexe besitzen.

Lemma (2.4): (I) Seien für $j = 1, 2, 3$ und $n > 0$ ($S_{j1} \dots S_{jp-1}$)

drei $[p, n]$ -Ketten mit $S_{j1} \varepsilon^1 = \psi_{n+2}$

für $j = 1, 2, 3$ $l = 1, \dots, p-1$ $i = 0, \dots, n$.

Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(1) es existiert eine $[p, n+1]$ -Kette $(T_1 \dots T_{p-1})$ in

$$(K, \psi) \text{ mit } (T_1 \varepsilon^{n+2-j} \dots T_{p-1} \varepsilon^{n+2-j}) = (S_{j1} \dots S_{jp-1})$$

für $j = 1, 2, 3$

$$(T_1 \varepsilon^i \dots T_{p-1} \varepsilon^i) = (\psi_{n+3} \dots \psi_{n+3})$$

für $0 \leq i \leq n-2$

(2) es existiert ein Paar $(T_1^1 \dots T_{p-1}^1), (T_1^2 \dots T_{p-1}^2)$

mit

$$T_1^1 \varepsilon^{n+4} = T_1^2 \varepsilon^{n+1} \quad l = 1, \dots, p-1$$

$$T_1^1 \varepsilon^{n+3} = T_{l+1}^2 \varepsilon^{n+1} \quad l = 1, \dots, p-2$$

$$T_{p-1}^1 \varepsilon^{n+3} = \psi_{n+3}$$

$$T_1^1 \varepsilon^{n+2} = T_1^2 \varepsilon^{n+2} \quad l = 1, \dots, p-1$$

$$T_1^1 \varepsilon^{n+1} = S_{21}$$

$$T_1^1 \varepsilon^n = S_{11}$$

$$T_1^2 \varepsilon^{n+4} = S_{31} \varepsilon^{n+1} \gamma^{n+2} \quad l = 1, \dots, p-1$$

$$T_1^2 \varepsilon^{n+3} = S_{31}$$

$$T_{11}^2 \varepsilon^n = S_{41} \varepsilon^{n+1} \gamma^n$$

$$T_1^1 \varepsilon^i = T_1^2 \varepsilon^i = \psi_{n+3} \quad 0 \leq i \leq n-1$$

(II) Sind für $j = 1, 2, 3$ ($S_{j1} \dots S_{jp-1}$) einfache $[p, n]$ -Ketten, so gilt die obige Äquivalenz für eine einfache $[p, n+1]$ -Kette ($T_1 \dots T_{p-1}$) und ein Paar ($T_1^1 \dots T_{p-1}^1$), ($T_1^2 \dots T_{p-1}^2$) mit $T_1^2 \varepsilon^{n+1} = \psi_{n+3}$.

Beweis: (I) Es gelte (1). Dann bildet man für $l=1, \dots, p-1$ die $(n, n+4)$ -Tüten ($\psi_{n+3} \dots \psi_{n+3}, S_{31} \varepsilon^{n+1} \eta^{n+1}, S_{11} \varepsilon^{n+1} \eta^n, T_1 \varepsilon^{n+2}, S_{31} \varepsilon^{n+1} \eta^{n-1}, \psi_{n+3}$) in K und wählt für jede eine beliebige Ausfüllung S_1 . Ausserdem setzt man $S_p = \psi_{n+4}$. Ist weiterhin für $l = 1, \dots, p-1$ τ_1 eine Ausfüllung der $(n, n+4)$ -Tüte ($\psi_{n+3} \dots \psi_{n+3}, S_{31}, S_{11} \varepsilon^{n+1} \eta^n, T_1 \varepsilon^{n+2}, S_{31} \varepsilon^{n+2} \eta^{n-1}, S_{31} \varepsilon^{n+1} \eta^{n-1}$) in K , so konstruiert man die beiden $(n, n+5)$ -Tüten ($\psi_{n+4} \dots \psi_{n+4}, S_{31} \eta^{n+1}, S_{11} \eta^n, T_1, \tau_1, S_{1+1}, S_1$) und ($\psi_{n+4}, \dots, \psi_{n+4}, S_{31} \eta^{n+2}, S_{11} \varepsilon^{n+1} \eta^n \eta^{n+1}, S_1, \tau_1, S_{31} \eta^{n-1}, S_{31} \varepsilon^{n+1} \eta^{n+2} \eta^{n-1}$) für $l=1, \dots, p-1$. Für beliebige Ausfüllungen w_{11}, w_{21} bilden die Folgen ($w_{11} \varepsilon^n \dots w_{1p-1} \varepsilon^n$), ($w_{21} \varepsilon^n \dots w_{2p-1} \varepsilon^n$) ein Paar der gesuchten Art.

Gilt umgekehrt (2), so bildet man für $l=1, \dots, p-1$ die $(n+2, n+4)$ -Tüten ($\psi_{n+3} \dots \psi_{n+3}, S_{31} \varepsilon^{n+1} \eta^{n+1}, T_1^2 \varepsilon^{n+1}, S_{11} \varepsilon^{n+1} \eta^n, S_{31} \varepsilon^{n+1} \eta^{n-1}, \psi_{n+3}$) in K mit Ausfüllung $\bar{S}_1$ und setzt $\bar{S}_p = \psi_{n+4}$.

Aus den $(n+3, n+5)$ -Tüten $(\psi_{n+4} \dots \psi_{n+4},$
 $s_{31} \gamma^{n+2}, t_{11}^2, s_{11} \varepsilon^{n+1} \gamma^n \gamma^{n+1}, \bar{s}_{11}, s_{31} \gamma^{n-1},$
 $s_{31} \varepsilon^{n+1} \gamma^{n+2} \gamma^{n-1})$ für $l = 1, \dots, p-1$ mit belie-
 biger Ausfüllung $\bar{w}_{21}$ gewinnt man die Simplexe
 $\bar{\tau}_1 = \bar{w}_{21} \varepsilon^{n+3}$ und bildet mit ihnen die
 $(n+2, n+5)$ -Tüten $(\psi_{n+4} \dots \psi_{n+4}, s_{31} \gamma^{n+1}, t_{11}^1,$
 $s_{11} \gamma^n, \bar{\tau}_1, \bar{s}_{1+1}, \bar{s}_1)$ in K für $l = 1, \dots, p-1$.
 Bei beliebiger Ausfüllung $\bar{w}_{11}$ bildet die Folge
 $(\bar{w}_{11} \varepsilon^{n+2} \dots \bar{w}_{1p-1} \varepsilon^{n+2})$ eine $[p, n+1]$ -Kette der
 gesuchten Art.

(II) Ist $(T_1 \dots T_{p-1})$ einfach, so kann die Ausfüllung

$s_1 = \psi_{n+4}$ gewählt werden, und damit ist

$$t_1^2 \varepsilon^{n+1} = s_1 \varepsilon^n = \psi_{n+3}.$$

Ist umgekehrt $t_1^2 \varepsilon^{n+1} = \psi_{n+3}$, so kann man

$$\bar{s}_1 = \psi_{n+4} \text{ setzen und damit } t_1 \varepsilon^{n+2} = \bar{s}_1 \varepsilon^{n+2} = \\ = \psi_{n+3}.$$

Lemma (2.5): (I) Seien für $j = 1, 2$ und $n \geq 0$ $(s_{j1} \dots s_{jp-1})$

zwei $[p, n]$ -Ketten mit $s_{j1} \varepsilon^1 = \psi_{n+2}$ für $j = 1, 2$

$l = 1, \dots, p-1 \quad i = 0, \dots, n$.

Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(1) es existiert eine $[p, n+1]$ -Kette $(T_1 \dots T_{p-1})$

in (K, ψ) mit

$$(T_1 \varepsilon^{n+2-j} \dots T_{p-1} \varepsilon^{n+2-j}) = (s_{j1} \dots s_{jp-1})$$

für $j = 1, 2$

$$(T_1 \varepsilon^1 \dots T_{p-1} \varepsilon^1) = (\psi_{n+3} \dots \psi_{n+3})$$

für $0 \leq i \leq n-1$

(2) es existiert ein Paar $(T_1^1 \dots T_{p-1}^1), (T_1^2 \dots T_{p-1}^2)$

mit

$$T_1^1 \varepsilon^{n+4} = T_1^2 \varepsilon^{n+1} \quad l = 1, \dots, p-1$$

$$T_1^1 \varepsilon^{n+3} = T_{l+1}^2 \varepsilon^{n+1} \quad l = 1, \dots, p-2$$

$$T_{p-1}^1 \varepsilon^{n+3} = \psi_{n+3}$$

$$T_1^1 \varepsilon^{n+2} = T_1^2 \varepsilon^{n+2}$$

$$T_1^1 \varepsilon^{n+1} = s_{11}$$

$$T_1^2 \varepsilon^{n+4} = s_{21} \varepsilon^{n+1} \gamma^{n+2} \quad l = 1, \dots, p-1$$

$$T_1^2 \varepsilon^{n+3} = s_{21}$$

$$T_1^1 \varepsilon^i = T_1^2 \varepsilon^i = \psi_{n+3} \quad 0 \leq i \leq n$$

(II) Sind für $j = 1, 2$ $(s_{j1} \dots s_{jp-1})$ einfache $[p, n]$ -Ketten, so gilt die obige Äquivalenz für eine einfache $[p, n+1]$ -Kette $(T_1 \dots T_{p-1})$ und ein Paar $(T_1^1 \dots T_{p-1}^1), (T_1^2 \dots T_{p-1}^2)$ mit $T_1^2 \varepsilon^{n+1} = \psi_{n+3}$.

Beweis: (I) Es gelte (1). Dann bildet man für $l = 1, \dots, p-1$ die $(n+1, n+4)$ -Tüten $(\psi_{n+3} \dots \psi_{n+3}, s_{21} \varepsilon^{n+1} \gamma^{n+1}, T_1 \varepsilon^{n+2}, s_{21} \varepsilon^{n+1} \gamma^n, \psi_{n+3})$ in K mit Ausfüllung s_1 und setzt $s_p = \psi_{n+4}$. Ist für $l = 1, \dots, p-1$ τ_l eine Ausfüllung der $(n+1, n+4)$ -Tüte $(\psi_{n+3} \dots \psi_{n+3}, s_{21}, T_1 \varepsilon^{n+2}, s_{21+1} \varepsilon^{n+1} \gamma^n, s_{21} \varepsilon^{n+1} \gamma^n)$, so liefern die beiden $(n+1, n+5)$ -Tüten

$(\psi_{n+4} \dots \psi_{n+4}, s_{21} \gamma^{n+1}, \tau_1, \tau_1, s_{1+1}, s_1)$ und
 $(\psi_{n+4} \dots \psi_{n+4}, s_{21} \gamma^{n+2}, s_1, \tau_1, s_{21} \gamma^n,$
 $, s_{21} \varepsilon^{n+1} \gamma^{n+2} \gamma^n)$ in K mit Ausfüllungen $\bar{K}_{11}$
 und $\bar{K}_{21}$ für $l=1, \dots, p-1$ ein Paar
 $(\bar{K}_{11} \varepsilon^{n+1} \dots \bar{K}_{1p-1} \varepsilon^{n+1})$ und $(\bar{K}_{21} \varepsilon^{n+1} \dots \bar{K}_{2p-1} \varepsilon^{n+1})$
 mit den geforderten Eigenschaften.

Gilt umgekehrt (2), so bildet man für $l=1, \dots, p-1$
 die $(n+2, n+4)$ -Tüten $(\psi_{n+3} \dots \psi_{n+3}, s_{21} \varepsilon^{n+1} \gamma^{n+1},$
 $, \tau_1^2 \varepsilon^{n+1}, s_{21} \varepsilon^{n+1} \gamma^n, \psi_{n+3})$ mit Ausfüllung $\bar{s}_1$
 und setzt ausserdem $\bar{s}_p = \psi_{n+4}$.

Die $(n+3, n+5)$ -Tüten $(\psi_{n+4} \dots \psi_{n+4}, s_{21} \gamma^{n+2}, \tau_1^2, \bar{s}_1,$
 $, s_{21} \gamma^n, s_{21} \varepsilon^{n+1} \gamma^{n+2} \gamma^n)$ mit Ausfüllung $\bar{K}_{21}$
 liefern dann für $l=1, \dots, p-1$ die Simplexe
 $\bar{\tau}_1 = \bar{K}_{21} \varepsilon^{n+3}$ und die $(n+2, n+5)$ -Tüten
 $(\psi_{n+4} \dots \psi_{n+4}, s_{21} \gamma^{n+1}, \tau_1^1, \bar{\tau}_1, \bar{s}_{1+1}, \bar{s}_1)$ mit
 Ausfüllung $\bar{K}_{11}$ schliesslich die gesuchte
 $[p, n+1]$ -Kette $(\bar{K}_{11} \varepsilon^{n+2} \dots \bar{K}_{1p-1} \varepsilon^{n+2})$.

(II) Ist $(\tau_1 \dots \tau_{p-1})$ einfach, so ist wieder $s_1 = \psi_{n+4}$
 wählbar und damit $\tau_1^2 \varepsilon^{n+1} = s_1 \varepsilon^{n+1} = \psi_{n+3}$, und
 umgekehrt folgt aus $\tau_1^2 \varepsilon^{n+1} = \psi_{n+3}$ $\bar{s}_1 = \psi_{n+4}$
 und somit $\tau_1 \varepsilon^{n+2} = \bar{s}_1 \varepsilon^{n+2} = \psi_{n+3}$.

Wir kommen nun zur Definition von $K([r]; p_1, \dots, p_s)$.

Definition (2.6): Ist (K, ψ) ein Kan-Komplex mit Basispunkt und G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe mit dem Invariantensystem $(r; p_1 \dots p_s)$, so versteht man unter $K([r]; p_1, \dots, p_s)$ den folgenden c.s.s.-Komplex:

- (1) die n -Simplexe von $K([r]; p_1, \dots, p_s)$ sind $(r+s)$ -Tupel

$$((S_{11}) \dots (S_{r1}) (S_{r+11} \dots S_{r+1p_1-1}) \dots \dots (S_{r+s1} \dots S_{r+sp_s-1}))$$

aus r einfachen $[2, n]$ -Ketten und je einer $[p_j, n]$ -Kette ($j = 1, \dots, s$) in (K, ψ) .

- (2) Entartung und Seitenbildung sind gegeben durch

$$\begin{aligned} & ((S_{11}) \dots (S_{r1}) (S_{r+11} \dots S_{r+1p_1-1}) \dots \dots (S_{r+s1} \dots S_{r+sp_s-1})) \varepsilon^1 = ((S_{11} \varepsilon^1) \dots \dots (S_{r1} \varepsilon^1) (S_{r+11} \varepsilon^1 \dots S_{r+1p_1-1} \varepsilon^1) \dots \dots (S_{r+s1} \varepsilon^1 \dots S_{r+sp_s-1} \varepsilon^1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ((S_{11}) \dots (S_{r1}) (S_{r+11} \dots S_{r+1p_1-1}) \dots \dots (S_{r+s1} \dots S_{r+sp_s-1})) \gamma^1 = ((S_{11} \gamma^1) \dots \dots (S_{r1} \gamma^1) (S_{r+11} \gamma^1 \dots S_{r+1p_1-1} \gamma^1) \dots \dots (S_{r+s1} \gamma^1 \dots S_{r+sp_s-1} \gamma^1)) \end{aligned}$$

Aus Lemma (2.2) und Lemma (2.3) folgt nun unmittelbar

Lemma (2.7): $K([r]; p_1, \dots, p_s)$ ist ein Kan-Komplex.

Bezeichnet man mit $\bar{\psi}$ die Ecke

$$\underbrace{((\psi_3) \dots (\psi_3))}_r \underbrace{(\psi_3 \dots \psi_3)}_{p_1^{-1}} \dots \underbrace{(\psi_3 \dots \psi_3)}_{p_s^{-1}}$$

aus $K([r]; p_1, \dots, p_s)$, so sind für $n \geq 0$ die Kanschen Homotopiegruppen $\pi_n(K([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\psi})$ erklärt, und man kann nun die folgende Definition aussprechen:

Definition (2.8): Ist (K, ψ) ein Kan-Komplex mit Basispunkt und G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe mit dem Invariantensystem $(r; p_1 \dots p_s)$, so setzt man für $n \geq 3$

$$\pi_n(K, \psi; G) = \pi_{n-3}(K([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\psi})$$

Betrachtet man speziell die Koeffizientengruppe $G = \mathbb{Z}_\infty$, so ergibt sich die folgende Beziehung zu den Kanschen Homotopiegruppen von K .

Lemma (2.9): Für $n \geq 3$ gilt $\pi_n(K, \psi; \mathbb{Z}_\infty) \approx \pi_n(K, \psi)$.

Beweis: Die n -Simplexe des c.s.s.-Komplexes $K([1])$ sind eingliedrige Folgen (S) von $(n+3)$ -Simplexen $S \in K$ mit der Eigenschaft $S \in^{n+3} = S \in^{n+2} = S \in^{n+1} = \psi_{n+2}$ und zwischen K und $K([1])$ bestehen die folgenden Beziehungen:

- (1) jeder n -Sphäre $(S) \in \Gamma_n(K([1]), \bar{\psi})$ entspricht eineindeutig die $(n+3)$ -Sphäre $S \in \Gamma_{n+3}(K, \psi)$.
- (2) $(S_1), (S_2) \in \Gamma_n(K([1]), \bar{\psi})$ sind homotop d.u.n.d., wenn $S_1, S_2 \in \Gamma_{n+3}(K, \psi)$ homotop sind.

(3) für $(S_1), (S_2) \in \Gamma_n(K[[1]], \bar{\psi})$ können die Produkte $(S_1)(S_2) = (T \epsilon^n)$ und $S_1 \cdot S_2 = S \epsilon^{n+3}$ bei geeigneter Wahl der Ausfüllungen T und S so bestimmt werden, dass $T \epsilon^n = S \epsilon^{n+3}$.

Das besagt aber gerade, dass für $n \geq 3$ gilt

$$\pi_n(K, \psi) \approx \pi_{n-3}(K[[1]], \bar{\psi}) \cong \pi_n(K, \psi; 2\infty).$$

3. Aussagen über die Gruppenstruktur in $\pi_n(K, \psi; G)$

Mit den Kanschen Definitionen kann in der Menge

$\pi_0(L, \phi)$ für einen beliebigen Kan-Komplex L mit Basispunkt ϕ keine Multiplikation eingeführt werden. Damit ist auch $\pi_3(K, \psi; G)$ zunächst nur eine Menge von Homotopieklassen. In Satz (3.1) wird nun gezeigt, dass es unter Verwendung der Zerlegungsfolgen aus Lemma (2.4) möglich ist, auch in $\pi_3(K, \psi; G)$ eine Multiplikation einzuführen, sodass $\pi_3(K, \psi; G)$ bezüglich dieser Multiplikation eine Gruppe wird. Dabei gilt $\pi_3(K, \psi; \mathbb{Z}_\infty) \approx \pi_3(K, \psi)$.

In Satz (3.2) wird dann bewiesen, dass die Homotopiegruppen $\pi_n(K, \psi; G)$ für $n \geq 4$ abelsch sind. Für $n = 4$ folgt die Behauptung wieder aus speziellen Eigenschaften des Komplexes $K([r]; p_1, \dots, p_g)$, während sie sich für $n > 4$ daraus ergibt, dass die Kanschen Homotopiegruppen abelsch sind für $n > 1$.

In Satz (3.3) wird schliesslich gezeigt, dass sich, wenn die Koeffizientengruppe G direkte Summe der endlich erzeugten abelschen Gruppen G_i ist, auch die Homotopiegruppe $\pi_n(K, \psi; G)$ für $n \geq 4$ als direkte Summe der Homotopiegruppen $\pi_n(K, \psi; G_i)$ darstellen lässt.

Satz (3.1): In der Menge $\pi_3(K, \psi; G)$ lässt sich eine Gruppenstruktur induzieren. ($\pi_3(K, \psi; \mathbb{Z}_\infty) \approx \pi_3(K, \psi)$).

Beweis: (I) Es seien für $j = 1, 2$ $\alpha^j = ((S_{11}^j) \dots (S_{r1}^j)$,

$(S_{r+11}^j \dots S_{r+1p_1-1}^j) \dots (S_{r+s1}^j \dots S_{r+sp_2-1}^j))$ zwei

Sphären aus $\Gamma_0(K([r]; p_1, \dots, p_g), \psi)$. In den

Dimensionen $n > 0$ wird das Produkt zweier n -Sphären gerade mithilfe von $(r+s)$ -Tupeln von $[p, n+1]$ -Ketten ($p = \underbrace{2, \dots, 2}_r, p_1, \dots, p_s$)

der in Lemma (2.4) betrachteten Art definiert.

Diese $[p, n+1]$ -Ketten können nun für $n = 0$ nicht mehr erklärt werden. Deshalb geht man zu den ihnen entsprechenden Zerlegungsfolgen über. Diese gewinnt man durch die folgenden Tütenbildungen in K :

(1) für $k = r+1, \dots, s$ und $l_k = 1, \dots, p_k - 1$

betrachtet man die $(1, 3)$ -Tüten $(S_{kl_k}^2 \epsilon^1,$

$S_{kl_k}^1 \epsilon^1, \psi_2)$ mit Ausfüllung S_{kl_k} und

setzt ausserdem $S_{k1} = \psi_3$ für $k = 1, \dots, r$

und $S_{kp_k} = \psi_3$ für $k = 1, \dots, r+s$.

(2) für $k = 1, \dots, r+s$ und $l_k = 1, \dots, p_k - 1$ bildet

man dann die $(2, 4)$ -Tüten $(S_{kl_k}^2 \epsilon^1 \gamma^0, S_{kl_k},$

$S_{kl_k}^1, S_{k1}^1 \epsilon^1 \gamma^2)$ mit Ausfüllung $T_{kl_k}^2$ und

die $(1, 4)$ -Tüten $(S_{kl_k}^2, T_{kl_k}^2 \epsilon^2, S_{kl_k+1}, S_{k1})$

mit Ausfüllung $T_{kl_k}^1$.

$$\begin{aligned} \text{Def.: } \alpha^1 \cdot \alpha^2 &= ((T_{11}^1 \epsilon^1) \dots (T_{r1}^1 \epsilon^1) (T_{r+11}^1 \epsilon^1 \dots \\ &\dots T_{r+1p_1-1}^1 \epsilon^1) \dots (T_{r+s1}^1 \epsilon^1 \dots T_{r+sp_s-1}^1 \epsilon^1)) \end{aligned}$$

(II) Es bleibt zu zeigen, dass die oben definierte Multiplikation bis auf Homotopie unabhängig ist

von der speziellen Wahl der Repräsentanten und der bei der Konstruktion auftretenden Ausfüllungen.

Seien also $\alpha^{ij} = ((S_{11}^{ij}) \dots (S_{r1}^{ij})(S_{r+11}^{ij} \dots$
 $\dots S_{r+1p_1-1}^{ij}) \dots (S_{r+s1}^{ij} \dots S_{r+sp_s-1}^{ij}))$ für $i, j = 1, 2$
 vier Sphären aus $\Gamma_0(K([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\psi})$ und
 sei $\alpha^{i1} \sim \alpha^{i2}$ für $i = 1, 2$ mittels der Homotopie $((H_{11}^i) \dots (H_{r1}^i)(H_{r+11}^i \dots H_{r+1p_1-1}^i) \dots$
 $\dots (H_{r+s1}^i \dots H_{r+sp_s-1}^i))$. Man bildet nun nach (I)
 die Produkte $\alpha^{11} \cdot \alpha^{21}$ und $\alpha^{12} \cdot \alpha^{22}$ mithilfe
 der Ausfüllungen $(T_{kl_k}^{11}, T_{kl_k}^{21})$ bzw. $(T_{kl_k}^{12}, T_{kl_k}^{22})$
 für $k = 1, \dots, r+s$ und $l_k = 1, \dots, p_k-1$. Gesucht
 ist dann ein 1-Simplex $\alpha \in K([r]; p_1, \dots, p_s)$, so
 dass $\alpha \varepsilon^1 = \alpha^{11} \cdot \alpha^{21}$ und $\alpha \varepsilon^0 = \alpha^{12} \cdot \alpha^{22}$.

Dazu betrachtet man die folgenden Tütenbildungen in K :

- (1) für $k = r+1, \dots, r+s$ und $l_k = 1, \dots, p_k-1$

die (2,4)-Tüten

$$(H_{kl_k}^2 \varepsilon^2, T_{kl_k}^{21} \varepsilon^1, S_{kl_k}^{11} \varepsilon^1 \eta^1, \psi_3)$$

mit Ausfüllung $\bar{\sigma}_{kl_k}^1$

$$(\bar{\sigma}_{kl_k}^1 \varepsilon^2, T_{kl_k}^{22} \varepsilon^1, H_{kl_k}^1 \varepsilon^2, \psi_3)$$

mit Ausfüllung $\bar{\sigma}_{kl_k}^2$

$$(S_{kl_k}^{22} \varepsilon^1 \eta^0, \bar{\sigma}_{kl_k}^1 \varepsilon^2, S_{kl_k}^{11}, S_{k1}^{11} \varepsilon^1 \eta^2)$$

mit Ausfüllung $\sigma_{kl_k}^3$ und setzt für

$$k = 1, \dots, r \quad \sigma_{k1}^1 = \sigma_{k1}^2 = \psi_4 \text{ und}$$

$$\sigma_{k1}^3 = s_{k1}^{11} \gamma^2 \text{ und für } k = 1, \dots, r+s$$

$$\sigma_{kp_k}^1 = \sigma_{kp_k}^2 = \psi_4.$$

- (2) die (2,5)-Tüten $(H_{kl_k}^2 \varepsilon^2 \gamma^0, \sigma_{kl_k}^1, \sigma_{kl_k}^3, s_{kl_k}^{11} \gamma^2, s_{k1}^{11} \varepsilon^1 \gamma^2 \gamma^3)$ mit Ausfüllung $\tau_{kl_k}^1$
 die (3,5)-Tüten $(H_{kl_k}^2 \varepsilon^2 \gamma^1, T_{kl_k}^{21}, \tau_{kl_k}^1 \varepsilon^2, s_{kl_k}^{11} \gamma^1, s_{k1}^{11} \varepsilon^1 \gamma^2 \gamma^1)$ mit Ausfüllung $\tau_{kl_k}^2$
 die (2,5)-Tüten $(H_{kl_k}^2, T_{kl_k}^{11}, \tau_{kl_k}^2 \varepsilon^3, \sigma_{kl_k+1}^1, \sigma_{k1}^1)$ mit Ausfüllung $\tau_{kl_k}^3$
 die (3,5)-Tüten $(\sigma_{kl_k}^3, T_{kl_k}^{22}, \sigma_{kl_k}^2, H_{kl_k}^1, H_{k1}^1 \varepsilon^2 \gamma^3)$ mit Ausfüllung $\tau_{kl_k}^4$
 die (2,5)-Tüten $(\tau_{kl_k}^3 \varepsilon^2, T_{kl_k}^{12}, \tau_{kl_k}^4 \varepsilon^3, \sigma_{kl_k+1}^2, \sigma_{k1}^2)$ mit Ausfüllung $\tau_{kl_k}^5$.

Die Folge $((\tau_{11}^5 \varepsilon^2) \dots (\tau_{r1}^5 \varepsilon^2) (\tau_{r+11}^5 \varepsilon^2) \dots$
 $\dots \tau_{r+1p_r-1}^5 \varepsilon^2) \dots (\tau_{r+s1}^5 \varepsilon^2 \dots \tau_{r+sp_s-1}^5 \varepsilon^2))$
 ist dann das gesuchte Simplex α .

(III) Nachweis der Gruppenaxiome.

(III 1) Das Assoziativgesetz: es seien $\alpha^j = ((s_{11}^j) \dots$

$$\dots (s_{r1}^j) (s_{r+11}^j \dots s_{r+1p_r-1}^j) \dots (s_{r+s1}^j \dots s_{r+sp_s-1}^j))$$

für $j = 1, 2, 3$ drei Sphären aus

$$\Gamma_0(K([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\psi}) \text{ und } (T_{kl_k}^{1(1,2)}, T_{kl_k}^{2(1,2)})$$

$$(T_{kl_k}^{1(2,3)}, T_{kl_k}^{2(2,3)}) \text{ und } (T_{kl_k}^{1[(1,2)3]}, T_{kl_k}^{2[(1,2)3]})$$

die nach (I) zu den Produktbildungen $\alpha^1 \cdot \alpha^2$,
 $\alpha^2 \cdot \alpha^3$ bzw. $(\alpha^1 \cdot \alpha^2) \alpha^3$ gehörenden Ausfüllun-

gen. Es ist zu zeigen, dass die das Produkt

$\alpha^1(\alpha^2 \cdot \alpha^3)$ definierenden Ausfüllungen

$$(T_{kl_k}^{1[1(2,3)]}, T_{kl_k}^{2[1(2,3)]}) \text{ so gewählt werden kön-}$$

nen, dass für $k = 1, \dots, r+s$ und $l_k = 1, \dots, p_k-1$

$$T_{kl_k}^{1[1(2,3)]} \varepsilon^1 = T_{kl_k}^{1[(1,2)3]} \varepsilon^1.$$

Dazu betrachtet man die folgenden Tütenbildungen

in K :

(1) für $k = r+1, \dots, r+s$ und $l_k = 1, \dots, p_k-1$ die

$$(2,4)\text{-Tüten } (T_{kl_k}^{2(2,3)} \varepsilon^1, T_{kl_k}^{2[(1,2)3]} \varepsilon^1,$$

$$T_{kl_k}^{2(1,2)} \varepsilon^1, \psi_3) \text{ mit Ausfüllung } \bar{\sigma}_{kl_k}^1 \text{ und}$$

$$\text{setzt für } k = 1, \dots, r \quad \bar{\sigma}_{k1}^1 = \psi_4 \text{ und für}$$

$$k = 1, \dots, r+s \quad \bar{\sigma}_{kp_k}^1 = \psi_4.$$

(2) für $k = 1, \dots, r+s$ und $l_k = 1, \dots, p_k-1$ die

$$(2,4)\text{-Tüten } (T_{kl_k}^{2(2,3)} \varepsilon^1, T_{kl_k}^{2[(1,2)3]} \varepsilon^1,$$

$$T_{kl_k}^{2(1,2)} \varepsilon^2, \bar{\sigma}_{k1}^1 \varepsilon^1, \gamma^2) \text{ mit Ausfüllung } \bar{\sigma}_{kl_k}^2$$

die (3,5)-Tüten

$$\begin{aligned}
& (T_{kl_k}^{2(2,3)}, T_{kl_k}^{2[(1,2)3]}, \varepsilon_{kl_k}^2, T_{kl_k}^{1(1,2)}, \\
& , T_{kl_k}^{1(1,2)} \varepsilon_{kl_k}^4 \eta^3) \text{ mit Ausfüllung } \tau_{kl_k}^1 \\
& (T_{kl_k}^{2(2,3)} \varepsilon_{kl_k}^1 \eta^0, \varepsilon_{kl_k}^1, \varepsilon_{kl_k}^2, T_{kl_k}^{2(1,2)}, \\
& , S_{kl_k}^1 \varepsilon_{kl_k}^1 \eta^2 \eta^3) \text{ mit Ausfüllung } \tau_{kl_k}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{die } (2,5)\text{-Tüten } (T_{kl_k}^{1(2,3)}, T_{kl_k}^{1[(1,2)3]}, \\
& , \tau_{kl_k}^1 \varepsilon_{kl_k}^3, \varepsilon_{kl_k+1}^1, \varepsilon_{kl_k}^1) \text{ mit Ausfüllung} \\
& \tau_{kl_k}^3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Es gilt dann für } k = 1, \dots, r+s \text{ und } l_k = 1, \dots, p_k-1 \\
& \tau_{kl_k}^2 \varepsilon_{kl_k}^3 = T_{kl_k}^{2[1(2,3)]}, \tau_{kl_k}^3 \varepsilon_{kl_k}^2 = T_{kl_k}^{1[1(2,3)]} \text{ und} \\
& \text{eine einfache Rechnung zeigt, dass } T_{kl_k}^{1[1(2,3)]} \varepsilon_{kl_k}^1 = \\
& = T_{kl_k}^{1[(1,2)3]} \varepsilon_{kl_k}^1.
\end{aligned}$$

(III 2) Auflösbarkeit der Gleichungen.

$$\begin{aligned}
& \text{Sind } \alpha^j = ((S_{11}^j) \dots (S_{r1}^j) (S_{r+11}^j \dots S_{r+1p_1-1}^j) \dots \\
& \dots (S_{r+sp_1}^j \dots S_{r+sp_{s-1}}^j)) \text{ für } j = 1, 2 \text{ zwei Sphären} \\
& \text{aus } \Gamma_o(K([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\psi}), \text{ so bildet man für} \\
& k = r+1, \dots, r+s \text{ und } l_k = 1, \dots, p_k-1 \text{ die} \\
& (0,3)\text{-Tüten } (S_{kl_k}^2 \varepsilon_{kl_k}^1, S_{kl_k}^1 \varepsilon_{kl_k}^1, \psi_2) \text{ mit Ausfüllung} \\
& S_{kl_k} \text{ und setzt } S_{kl_k} = \psi_3 \text{ für } k = 1, \dots, r \text{ und} \\
& S_{kp_k} = \psi_3 \text{ für } k = 1, \dots, r+s. \\
& \text{Ist für } k = 1, \dots, r+s \text{ und } l_k = 1, \dots, p_k-1 \tau_{kl_k}^2
\end{aligned}$$

eine Ausfüllung der $(2,4)$ -Tüte $(s_{kl_k} \varepsilon^0 \eta^0, s_{kl_k}, s_{kl_k}^1, s_{kl_k}^1 \varepsilon^1 \eta^2)$ und $\tau_{kl_k}^1$ eine Ausfüllung der $(0,4)$ -Tüte $(s_{kl_k}^2, \tau_{kl_k}^2 \varepsilon^2, s_{kl_k+1}, s_{kl_k+1})$, so hat die Sphäre $\beta = ((\tau_{11}^1 \varepsilon^0) \dots (\tau_{r1}^1 \varepsilon^0), (\tau_{r+11}^1 \varepsilon^0 \dots \tau_{r+1p-1}^1 \varepsilon^0) \dots (\tau_{r+s1}^1 \varepsilon^0 \dots \tau_{r+sp-1}^1 \varepsilon^0))$ die Eigenschaft $\alpha^1 \cdot \beta = \alpha^2$. Die Auflösbarkeit der Gleichung $y \cdot \alpha^1 = \alpha^2$ beweist man entsprechend.

(IV) Aus Lemma (2.9) und der Definition der Multiplikation folgt leicht

$$\pi_3(K, \psi; \mathbb{Z}_m) \sim \pi_3(K, \psi) .$$

Satz (3.2): $\pi_n(K, \psi; G)$ ist abelsch für $n \geq 4$.

Wir beweisen zunächst die entsprechende Behauptung für die Kanschen Homotopiegruppen.

Satz (3.2'): Ist (K, ψ) ein Kan-Komplex mit Basispunkt, so ist $\pi_n(K, \psi)$ abelsch für $n > 1$.

Beweis: Es seien $\sigma, \tau \in \Gamma_n(K, \psi)$ und s_1 eine Ausfüllung der $(n, n+1)$ -Tüte $(\psi_n \dots \psi_n, \sigma, \tau)$ in K . Dann ist zu zeigen: es existiert eine Ausfüllung s_2 der $(n, n+1)$ -Tüte $(\psi_n \dots \psi_n, \tau, \sigma)$ in K , so dass $s_2 \varepsilon^n = s_1 \varepsilon^n$.

Dazu betrachtet man die folgenden Tüten in K :

(1) die $(n, n+2)$ -Tüte $(\psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, \tau \eta^{n-2}, \tau \eta^{n-2}, \sigma \eta^n, \sigma \eta^n)$ mit Ausfüllung ω_1

- (2) die $(n+1, n+2)$ -Tüte $(\psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, \tau \gamma^n, \varepsilon_1, \sigma \gamma^{n-1}, \tau \gamma^{n-2})$ mit Ausfüllung ω_2
- (3) die $(n-1, n+2)$ -Tüte $(\psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, \tau \gamma^{n-1}, \omega_1 \varepsilon^n, \omega_2 \varepsilon^{n+1}, \sigma \gamma^{n-1})$ mit Ausfüllung ω_3 .
- $\varepsilon_2 = \omega_3 \varepsilon^{n-1}$ ist dann das gesuchte Simplex.

Beweis von Satz (3.2): Für $n \geq 5$ gilt die Behauptung nach Satz (3.2').

$n = 4$: seien $\alpha^j = ((S_{11}^j) \dots (S_{r1}^j) (S_{r+11}^j \dots S_{r+1p_1-1}^j) \dots (S_{r+s1}^j \dots S_{r+sp_s-1}^j))$ für $j = 1, 2$ zwei Sphären aus $\Gamma_1(K([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\psi})$ und $\beta = ((S_{11}) \dots (S_{r1}), (S_{r+11} \dots S_{r+1p_1-1}) \dots (S_{r+s1} \dots S_{r+sp_s-1}))$ eine Ausfüllung der $(1, 2)$ -Tüte (α^1, α^2) in $K([r]; p_1, \dots, p_s)$. Gesucht ist ein 2-Simplex $\gamma \in K([r]; p_1, \dots, p_s)$ mit

$$\begin{aligned} \gamma \varepsilon^2 &= \alpha^1 \\ \gamma \varepsilon^1 &= \beta \varepsilon^1 \\ \gamma \varepsilon^0 &= \alpha^2 \end{aligned}$$

Dazu bestimmt man zunächst für $k = 1, \dots, r+s$ und $l_k = 1, \dots, p_k-1$ entsprechend Lemma (2.4) das zu S_{kl_k} gehörende Zerlegungspaar $(T_{kl_k}^1, T_{kl_k}^2)$. Dann betrachtet man die folgenden Tütenbildungen in K :

(1) für $k = r+1, \dots, r+s$ und $l_k = 1, \dots, p_k-1$ die $(2, 5)$ -Tüten $(S_{kl_k}^2 \varepsilon^2 \gamma^0, S_{kl_k}^2 \varepsilon^2 \gamma^0, S_{kl_k}^1 \varepsilon^2 \gamma^2, S_{kl_k}^1 \varepsilon^2 \gamma^2, \psi_4)$ mit Ausfüllung $\psi_{kl_k}^1$ und setzt $\psi_{k1}^1 = \psi_5$ für $k = 1, \dots, r$ und $\psi_{kp_k}^1 = \psi_5$ für

für $k = 1, \dots, r+s$

(2) für $k = r+1, \dots, r+s$ und $l_k = 1, \dots, p_k-1$ die

(3,6)-Tüten $(s_{kl_k}^2 \varepsilon^2 \gamma^0 \gamma^1, s_{kl_k}^2 \varepsilon^2 \gamma^0 \gamma^1,$

$\gamma_{kl_k}^1, s_{kl_k}^1 \gamma^3, s_{kl_k}^1 \gamma^3, s_{kl_k}^1 \varepsilon^2 \gamma^3 \gamma^4)$ mit

Ausfüllung $\sigma_{kl_k}^2$ und setzt $\sigma_{k1}^2 = s_{k1}^1 \gamma^3 \gamma^4$

für $k = 1, \dots, r$

(3) für $k = r+1, \dots, r+s$ und $l_k = 1, \dots, p_k-1$ die

(2,5)-Tüten $(s_{kl_k}^2 \varepsilon^2 \gamma^0, s_{kl_k}^2 \varepsilon^2 \gamma^0, s_{kl_k}^1,$

$s_{kl_k+1}^1 \varepsilon^2 \gamma^2, s_{k1}^1 \varepsilon^2 \gamma^2)$ mit Ausfüllung $\sigma_{kl_k}^3$

und setzt $\sigma_{k1}^3 = s_{k1}^1 \gamma^2$

(4) für $k = 1, \dots, r+s$ und $l_k = 1, \dots, p_k-1$ die

(2,6)-Tüten $(s_{kl_k}^2 \gamma^0, s_{kl_k}^2 \gamma^0, s_{kl_k}^1 \gamma^2, \sigma_{kl_k}^3,$

$\sigma_{kl_k+1}^1, \sigma_{k1}^1)$ mit Ausfüllung $\sigma_{kl_k}^4$

$(s_{kl_k}^2 \varepsilon^2 \gamma^1 \gamma^0, s_{kl_k}^2 \varepsilon^2 \gamma^1 \gamma^0,$

$\sigma_{kl_k}^2 \varepsilon^3, \sigma_{kl_k}^3, s_{kl_k}^1 \gamma^2, s_{k1}^1 \varepsilon^2 \gamma^3 \gamma^2)$ mit Aus-

füllung $\sigma_{kl_k}^5$

(5) für $k = r+1, \dots, r+s$ und $l_k = 1, \dots, p_k-1$ die

(3,5)-Tüten $(s_{kl_k}^2 \varepsilon^2 \gamma^1, t_{kl_k}^2 \varepsilon^2, \sigma_{kl_k}^1 \varepsilon^2,$

$s_{kl_k}^1 \varepsilon^2 \gamma^1, \psi_4)$ mit Ausfüllung $\sigma_{kl_k}^6$ und setzt

$\sigma_{k1}^6 = \psi_5$ für $k = 1, \dots, r$ und $\sigma_{kp_k}^6 = \psi_5$ für

$k = 1, \dots, r+s.$

Damit sind alle Hilfsmittel zusammengestellt, um aus den Zerlegungspaaren $(T_{kl_k}^1, T_{kl_k}^2)$ das gesuchte Simplex δ zu konstruieren und zwar mit Hilfe der (4,6)-Tüten $(S_{kl_k}^2 \varepsilon^2 \gamma^1 \gamma^2, T_{kl_k}^2, \varepsilon_{kl_k}^5 \varepsilon^2, \varepsilon_{kl_k}^6, S_{kl_k}^1 \gamma^1, S_{kl_k}^1 \varepsilon^2 \gamma^3 \gamma^1)$ mit Ausfüllung $\varepsilon_{kl_k}^7$ und der (3,6)-Tüten $(S_{kl_k}^2 \gamma^1, T_{kl_k}^1, \varepsilon_{kl_k}^5 \varepsilon^2, \varepsilon_{kl_k}^7 \varepsilon^4, \varepsilon_{kl_k+1}^6, \varepsilon_{kl_k}^6)$ mit Ausfüllung $\varepsilon_{kl_k}^8$ für $k = 1, \dots, r+s$ und $l_k = 1, \dots, p_k-1$. Es ist dann $\delta = ((\varepsilon_{11}^8 \varepsilon^3) \dots (\varepsilon_{r1}^8 \varepsilon^3), (\varepsilon_{r+11}^8 \varepsilon^3 \dots \varepsilon_{r+1p_r-1}^8) \dots (\varepsilon_{r+s1}^8 \varepsilon^3 \dots \varepsilon_{r+sp_s-1}^8 \varepsilon^3))$.

Satz (3.3): Lässt sich die Gruppe G darstellen als direkte Summe der endlich erzeugten abelschen Gruppen G_i mit den Invarianten $(r_i; p_{i1} \dots p_{is_i})$ für $i=1, \dots, m$, so gilt für $n \geq 4$

$$\pi_n(K, \psi; \psi) \approx \sum_1^m \oplus \pi_n(K, \psi; G_i)$$

und die Zerlegung ist natürlich.

Beweis: Da $K([r]; p_1, \dots, p_s) \approx K([r]; p_{11}, \dots, p_{1s_1}) \times \dots$

$\dots \times K([r]; p_{m1}, \dots, p_{ms_m})$, ergibt sich Satz (3.3) unmittelbar aus der folgenden Behauptung:

$(L_1, \phi^1), \dots, (L_m, \phi^m)$ seien m Kan-Komplexe mit Pasispunkt. Dann gilt für $n \geq 1$

$$\pi_n(L_1 \times \dots \times L_m, (\phi^1, \dots, \phi^m)) \approx \pi_n(L_1, \phi^1) \oplus \dots \oplus \pi_n(L_m, \phi^m).$$

Der Beweis dieser Behauptung ist trivial, da in

$L_1 X \dots X L_m$ alle Begriffe koordinatenweise in Bezug auf den jeweiligen Basispunkt erklärt sind.

Folgerung: Ist G frei abelsch, so gilt für $n \geq 4$

$$\pi_n(K, \psi; G) \approx \pi_n(K, \psi) \otimes G$$

4. Die Abhängigkeit der Homotopiegruppen von (K, ψ)

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass gewisse Eigenschaften der Kantschen Homotopiegruppen auch für die hier definierten Homotopiegruppen mit Koeffizienten gültig sind.

So wird in Satz (4.1) bewiesen, dass $\pi_n(*, *; G)$ ein Funktor ist von der Kategorie der Kan-Komplexe mit Basispunkt unter den c.s.s.-Abbildungen in die Kategorie der Gruppen und Homomorphismen, wobei homotope c.s.s.-Abbildungen in den gleichen Homomorphismus übergehen.

In Satz (4.2) wird die Existenz einer exakten Homotopiesequenz für eine beliebige Fasersequenz $(F, \phi) \xrightarrow{q} \xrightarrow{q} (E, \chi) \xrightarrow{p} (B, \psi)$ nachgewiesen und in Satz (4.3) die Kommutativität eines Diagramms von zwei solchen Homotopiesequenzen gezeigt.

Satz (4.1): Sei $\mathcal{K} = \{(K, \psi); f\}$ die Kategorie der Kan-Komplexe mit Basispunkt (K, ψ) und c.s.s.-Abbildungen f und $\mathcal{G} = \{H, h\}$ die Kategorie der Gruppen H und Homomorphismen h . Dann gilt

- (I) für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe G ist $\pi_n(*, *; G)$ $n \geq 3$ ein Funktor von $\mathcal{K}$ in $\mathcal{G}$; d.h. jede c.s.s.-Abbildung $f: (K, \psi) \longrightarrow (L, \phi)$ induziert einen Homomorphismus ¹⁾

$$f_*: \pi_n(K, \psi; G) \longrightarrow \pi_n(L, \phi; G)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) ist $i: (K, \psi) \longrightarrow (K, \psi)$ die Identität, so

¹⁾ $\pi_n(f; G) = f_*$

ist i_* die Identität

(2) sind $f:(K, \psi) \longrightarrow (L, \phi)$ und $g:(L, \phi) \longrightarrow (M, \chi)$ zwei c.s.s.-Abbildungen, so gilt

$$(g \cdot f)_* = g_* \cdot f_*.$$

(II) sind $f, g:(K, \psi) \longrightarrow (L, \phi)$ zwei homotope c.s.s.-Abbildungen relativ ψ , so gilt

$$f_* = g_*.$$

Für die Kanschen Homotopiegruppen ergibt sich die Funktoreigenschaft unmittelbar aus der Definition der induzierten Homomorphismen. Wir zeigen nun zunächst, dass auch die Eigenschaft (II) aus Satz (4.1) für die Kanschen Homotopiegruppen gültig ist.

Satz (4.1'): Sind $f, g:(K, \psi) \longrightarrow (L, \phi)$ zwei homotope c.s.s.-Abbildungen relativ ψ , so gilt für die induzierten Homomorphismen $f_*, g_*: \pi_n(K, \psi) \longrightarrow \pi_n(L, \phi)$

$$f_* = g_*.$$

Beweis: Sei $F: K \times \Delta[1] \longrightarrow L$ die Homotopie zwischen f und g und $[\sigma] \in \pi_n(K, \psi)$.

Man betrachtet nun für $i = 0, \dots, n$ die Simplexe

$$\tau_i = F(\sigma \gamma^i, \varepsilon_1 \gamma^0 \dots \hat{\gamma}^i \dots \gamma^n) \in L_{n+1}.$$

Für die Seiten von τ_i gilt:

$$\tau_0 \varepsilon^j = \begin{cases} \phi_n & j > 1 \\ F(\sigma, \varepsilon_1 \gamma^1 \dots \gamma^{n-1}) & j = 1 \\ f(\sigma) & j = 0 \end{cases}$$

$$\tau_i \varepsilon^j = \begin{cases} \phi_n & j > i+1 \\ F(\sigma, \varepsilon_1 \gamma^0 \dots \hat{\gamma}^1 \dots \gamma^{n-1}) & j = i+1 \\ F(\sigma, \varepsilon_1 \gamma^0 \dots \gamma^{\hat{i}-1} \dots \gamma^{n-1}) & j = i \\ \phi_n & j < i \end{cases} \quad 0 < i < n$$

$$\tau_n \varepsilon^j = \begin{cases} g(\sigma) & j = n+1 \\ F(\sigma, \varepsilon_1 \gamma^0 \dots \gamma^{n-2}) & j = n \\ \phi_n & j < n \end{cases}$$

Da sich für jedes $i = 0, \dots, n-1$ mithilfe der $(i+1, n+2)$ -Tüten

$(\phi_{n+1} \dots \phi_{n+1}, \underbrace{\tau_i \varepsilon^1 \gamma^n}_{\tau}, \underbrace{\phi_{n+1} \dots \phi_{n+1}}_{\varepsilon^{i+2}}, \tau_i \varepsilon^1 \gamma^i, \tau_i)$ mit Ausfüllung s_i ein Simplex

$$\bar{\tau}_i = s_i \varepsilon^{i+1} \text{ mit } \bar{\tau}_i \varepsilon^{n+1} = \tau_i \varepsilon^{i+1}$$

$$\bar{\tau}_i \varepsilon^n = \tau_i \varepsilon^i$$

$$\bar{\tau}_i \varepsilon^j = \phi_n \quad j < n$$

gewinnen läßt, folgt daraus, dass $f(\tau) \sim g(\sigma)$,

also $f_* = g_*$.

Beweis von Satz (4.1): (I) Jede c.s.s.-Abbildung

$f: (K, \psi) \longrightarrow (L, \phi)$ induziert eine c.s.s.-Abbil-

dung $\bar{f}: (K(\lfloor r \rfloor; p_1, \dots, p_s), \bar{\psi}) \longrightarrow$

$\longrightarrow (L(\lfloor r \rfloor; p_1, \dots, p_s), \bar{\phi})$ mit

$$\begin{aligned} \bar{f}((S_{11}) \dots (S_{r1}) (S_{r+11} \dots S_{r+1p_1-1}) \dots (S_{r+s1} \dots S_{r+sp_s-1})) &= \\ = ((f(S_{11})) \dots (f(S_{r1})) (f(S_{r+11}) \dots f(S_{r+1p_1-1})) \dots & \\ \dots (f(S_{r+s1}) \dots f(S_{r+sp_s-1}))) & \end{aligned}$$

und dieser induziert für $n \geq 0$ einen Homomorphismus

$$f_{\#}: \Pi_n(K([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\psi}) \longrightarrow \Pi_n(L([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\phi}) .$$

Die Eigenschaften (1) und (2) ergeben sich unmittelbar aus der Definition von $f_{\#}$.

(II) Es seien $f, g: (K, \psi) \longrightarrow (L, \phi)$ zwei homotope c.s.s.-Abbildungen mit einer Homotopie $F: f \simeq g$ rel. ψ und $\bar{f}$ bzw. $\bar{g}$ die oben definierten induzierten Abbildungen. Dann ist für jedes n -Simplex $\alpha \in \Delta [1]$

$$\begin{aligned} & G((S_{11}) \dots (S_{r1})(S_{r+11} \dots S_{r+1p_1-1}) \dots (S_{r+s1} \dots S_{r+sp_s-1}); \alpha) = \\ & = (F(S_{11}, \alpha \gamma^n \gamma^{n+1} \gamma^{n+2}) \dots F(S_{r1}, \alpha \gamma^n \gamma^{n+1} \gamma^{n+2}), \\ & , (F(S_{r+11}, \alpha \gamma^n \gamma^{n+1} \gamma^{n+2}) \dots F(S_{r+1p_1-1}, \alpha \gamma^n \gamma^{n+1} \gamma^{n+2})) \dots \\ & \dots (F(S_{r+s1}, \alpha \gamma^n \gamma^{n+1} \gamma^{n+2}) \dots F(S_{r+sp_s-1}, \alpha \gamma^n \gamma^{n+1} \gamma^{n+2}))) \end{aligned}$$

ein n -Simplex in $L([r]; p_1, \dots, p_s)$ mit

$$\begin{aligned} (1) \quad & G((S_{11}) \dots (S_{r1})(S_{r+11} \dots S_{r+1p_1-1}) \dots (S_{r+s1} \dots S_{r+sp_s-1}); \\ & ; \varepsilon_1^0 \gamma^0 \dots \gamma^{n-1}) = f((S_{11}) \dots (S_{r1})(S_{r+11} \dots \\ & \dots S_{r+1p_1-1}) \dots (S_{r+s1} \dots S_{r+sp_s-1})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & G((S_{11}) \dots (S_{r1})(S_{r+11} \dots S_{r+1p_1-1}) \dots (S_{r+s1} \dots \\ & \dots S_{r+sp_s-1}); \varepsilon_1^1 \gamma^0 \dots \gamma^{n-1}) = g((S_{11}) \dots (S_{r1}), \\ & , (S_{r+11} \dots S_{r+1p_1-1}) \dots (S_{r+s1} \dots S_{r+sp_s-1})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & G((\psi_4) \dots (\psi_4)(\psi_4 \dots \psi_4) \dots (\psi_4 \dots \psi_4); \varepsilon_1) = \\ & = ((\phi_4) \dots (\phi_4)(\phi_4 \dots \phi_4) \dots (\phi_4 \dots \phi_4)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d.h. } G: K([r]; p_1, \dots, p_s) \times \Delta [1] & \longrightarrow \\ & \longrightarrow L([r]; p_1, \dots, p_s) \end{aligned}$$

ist eine Homotopie zwischen $\bar{f}$ und $\bar{g}$ relativ $\bar{\psi}$.

Eigenschaft (II) ergibt sich nun aus Satz (4.1').

Satz (4.2): $(F, \phi) \xrightarrow{q} (E, \chi) \xrightarrow{p} (B, \psi)$ sei eine Fasersequenz. Für jedes $n \geq 4$ existiert ein Homomorphismus $\partial_n: \pi_n(B, \psi; G) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, \phi; G)$ und die Homotopiesequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & \pi_n(F, \phi; G) & \xrightarrow{q\#} & \pi_n(E, \chi; G) & \xrightarrow{p\#} & \\ & & \xrightarrow{p\#} & \pi_n(B, \psi; G) & \xrightarrow{\partial_n} & \pi_{n-1}(F, \phi; G) & \xrightarrow{q\#} \\ & & \xrightarrow{q\#} & \dots & \xrightarrow{p\#} & \pi_3(B, \psi; G) & \end{array}$$

ist exakt.

Beweis: Wegen [2; Def.3.4, Beh.3.5] ergibt sich die Existenz von ∂_n und die Exaktheit der Homotopiesequenz unmittelbar aus der folgenden Behauptung.

Behauptung: $(F([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\phi}) \xrightarrow{\bar{q}} (E([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\chi}) \xrightarrow{\bar{p}} (B([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\psi})$ ist eine Fasersequenz.

Beweis: Die Fasersequenzeigenschaften (1) und (2) folgen direkt aus den entsprechenden Eigenschaften von q und p .

Zum Beweis der Eigenschaft (3) ist zu zeigen:

(a) für jede Folge $(s_{01} \dots s_{0r-1}) \dots (\widehat{s_{k-11}} \dots \dots \widehat{s_{k-1r-1}}) \dots (s_{n1} \dots s_{nr-1})$ von $[r, n-1]$ -Ketten

in (E, χ)

mit $s_{i1} \varepsilon^{j-1} = s_{j1} \varepsilon^i$ für $\begin{cases} 1 = 1, \dots, r-1 \\ 0 \neq i < j \leq n \\ i \neq k-1 \neq j \end{cases}$

und jede $[r, n]$ -Kette $(t_1 \dots t_{r-1})$ in (B, ψ) mit

$$T_1 \varepsilon^i = p(S_{i1}) \text{ für } \begin{matrix} l = 1, \dots, r-1 \\ 0 \leq i \leq n \\ i \neq k-1 \end{matrix}$$

existiert eine $[r, n]$ -Kette $(S_1 \dots S_{r-1})$ in (E, χ) , so dass $S_1 \varepsilon^i = S_{i1}$ $\begin{matrix} l = 1, \dots, r-1 \\ i \neq k-1 \end{matrix}$

$$p(S_l) = T_l \quad l = 1, \dots, r-1$$

(b) Sind die Ketten $(S_{j1} \dots S_{jr-1})$ und $(T_1 \dots T_{r-1})$ einfach, so ist $(S_1 \dots S_{r-1})$ einfach.

Die Konstruktion der $[r, n]$ -Kette $(S_1 \dots S_{r-1})$ verläuft nun genau wie im Beweis von Lemma (2.3), wobei nur zu beachten ist, dass wegen der Faser-eigenschaft von p die Ausfüllungen T_1^m und S_1 so gewählt werden können, dass für $l = 1, \dots, r-1$ und $m = 1, 2, 3$ gilt $p(T_1^m) = T_l \varepsilon^{n+m}$ und $p(S_1) = T_1$.

Satz (4.3): Es seien $(F_1, \phi^1) \xrightarrow{q_1} (E_1, \chi^1) \xrightarrow{p_1} (B_1, \psi^1)$ und $(F_2, \phi^2) \xrightarrow{q_2} (E_2, \chi^2) \xrightarrow{p_2} (B_2, \psi^2)$ zwei Fasersequenzen und $f: (E_1, \chi^1) \rightarrow (E_2, \chi^2)$ und $g: (B_1, \psi^1) \rightarrow (B_2, \psi^2)$ zwei c.s.s.-Abbildungen mit $g \circ p_1 = p_2 \circ f$.

Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\partial_1} \pi_n(F_1, \phi^1; G) & \xrightarrow{q_{1\#}} & \pi_n(E_1, \chi^1; G) & \xrightarrow{p_{1\#}} & \pi_n(B_1, \psi^1; G) & \xrightarrow{\partial_1} & \pi_{n-1}(F_1, \phi^1; G) \xrightarrow{q_{1\#}} \\ & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow g_{\#} & & \downarrow (q_2^{-1} \circ q_{1\#}) \\ \xrightarrow{\partial_2} \pi_n(F_2, \phi^2; G) & \xrightarrow{q_{2\#}} & \pi_n(E_2, \chi^2; G) & \xrightarrow{p_{2\#}} & \pi_n(B_2, \psi^2; G) & \xrightarrow{\partial_2} & \pi_{n-1}(F_2, \phi^2; G) \xrightarrow{q_{2\#}} \end{array}$$

Beweis: Da auch für die induzierten Abbildungen die Beziehung $\bar{g} \cdot \bar{p}_1 = \bar{p}_2 \cdot \bar{f}$ gilt, ergibt sich Satz (4.3) unmittelbar aus der folgenden Behauptung.

Behauptung: Sind $(F_1, \phi^1) \xrightarrow{q_1} (E_1, \chi^1) \xrightarrow{p_1} (B_1, \psi^1)$

und $(F_2, \phi^2) \xrightarrow{q_2} (E_2, \chi^2) \xrightarrow{p_2} (B_2, \psi^2)$

zwei Fasersequenzen und $f: (E_1, \chi^1) \longrightarrow (E_2, \chi^2)$

und $g: (B_1, \psi^1) \longrightarrow (B_2, \psi^2)$ zwei c.s.s.-Abbildungen mit $g \cdot p_1 = p_2 \cdot f$, so ist das folgende Diagramm

kommutativ

$$\begin{array}{ccccccc}
 \xrightarrow{\partial_1} \pi_n(F_1, \phi^1) & \xrightarrow{q_{1\#}} & \pi_n(E_1, \chi^1) & \xrightarrow{p_{1\#}} & \pi_n(B_1, \psi^1) & \xrightarrow{\partial_1} & \pi_{n-1}(F_1, \phi^1) \xrightarrow{c_{1\#}} \\
 & & \downarrow (q_1^{-1} f q_1)_\# \text{ (1)} & & \downarrow f_\# \text{ (2)} & & \downarrow (q_1^{-1} f q_1)_\# \text{ (3)} \\
 \xrightarrow{\partial_2} \pi_n(F_2, \phi^2) & \xrightarrow{q_{2\#}} & \pi_n(E_2, \chi^2) & \xrightarrow{p_{2\#}} & \pi_n(B_2, \psi^2) & \xrightarrow{\partial_2} & \pi_{n-1}(F_2, \phi^2) \xrightarrow{c_{2\#}}
 \end{array}$$

Beweis: In (1) und (2) gilt die Kommutativität wegen der zweiten Funktoreigenschaft.

Sei $[\tau] \in \pi_n(B_1, \psi^1)$. Dann ist $\phi_1[\tau] = [q_1^{-1} \circ \tau \circ q_1]^n$

mit $\tau \circ q_1 \circ \varepsilon^i = \chi^1 \gamma^0 \dots \gamma^{n-2}$ für $0 \leq i < n$ und

$p_1(\tau \circ q_1) = \tau$. Daraus folgt $(f \circ \tau \circ q_1) \circ \varepsilon^i = \chi^2 \gamma^0 \dots \gamma^{n-2}$

für $0 \leq i < n$ und $p_2(f \circ \tau \circ q_1) = g \circ \tau$ und somit

$$\begin{aligned}
 (q_2^{-1} f q_1)_\# \partial_1 [\tau] &= [q_2^{-1} f (q_1 \circ \tau)] = \partial_2 [g \circ \tau] = \\
 &= c_2 \cdot g_\# [\tau] .
 \end{aligned}$$

5. Die Abhängigkeit der Homotopiegruppen von der Koeffizientengruppe G

Für die folgenden Untersuchungen seien die Koeffizientengruppen G stets in einer festen Darstellung bezüglich einer ausgezeichneten Basis $\mathfrak{B}_G$ gegeben. Bekanntlich lässt sich dann jeder Homomorphismus $\varphi: G_1 \longrightarrow G_2$ durch eine gewisse Matrix A_φ beschreiben [5: Kap.5]. Es soll nun gezeigt werden, dass jede solche Matrix für $n \geq 4$ einen Homomorphismus $\varphi_*: \pi_n(K, \varphi; G_1) \longrightarrow \pi_n(K, \varphi; G_2)$ induziert.

Dazu wird zunächst bewiesen, dass die Sphären $(S)_\varepsilon \in \Gamma_n(K([1]), \bar{\varphi})$ und $(S_1 \dots S_{p^i-1})_\varepsilon \in \Gamma_n(K(p^i), \bar{\varphi})$ in gleicher Weise abgebildet werden können, wie die ihnen entsprechenden Basiselemente der Koeffizientengruppe G , d.h., dass für beliebiges p, i und j Abbildungen $h: \Gamma_n(K([1]), \bar{\varphi}) \longrightarrow \Gamma_n(K(p^i), \bar{\varphi})$ und $h: \Gamma_n(K(p^i), \bar{\varphi}) \longrightarrow \Gamma_n(K(p^j), \bar{\varphi})$ existieren, die Homomorphismen der entsprechenden Homotopiegruppen induzieren.

Mit Hilfe dieser Abbildungen und der Matrix A_φ lässt sich dann der Homomorphismus φ_* definieren.

In Satz (5.5) wird weiterhin für $\pi_n(K, \varphi; G)$ die universelle Koeffizientenformel bewiesen und zwar dadurch, dass man für die exakte Sequenz $0 \longrightarrow Z_\infty \xrightarrow{A_i(p^i)} Z_\infty \xrightarrow{A_i(1)} Z_{pi} \longrightarrow 0$ einen Randhomomorphismus $\partial_*: \pi_n(K, \varphi; Z_{pi}) \longrightarrow \pi_{n-1}(K, \varphi; Z_\infty)$ definiert, der zusammen mit den induzierten Homomorphismen φ_{*1} und φ_{*2} eine exakte Homotopiesequenz bestimmt, aus der sich die universelle Koeffizientenformel dann unmittelbar ablesen lässt.

Lemma (5.1): Sei (K, ψ) ein Kan-Komplex mit Basispunkt und Z_p eine endlich zyklische Gruppe von der Ordnung p .

Für jedes Element $[(S_1 \dots S_{p-1})] \in \Pi_{n+3}(K, \psi; Z_p)$

und jedes $i \geq 1$ lässt sich eine i -te Potenz

$(S_1 \dots S_{p-1})^i \stackrel{!}{=} (S_1^i \dots S_{p-1}^i)$ so bestimmen, dass

$S_1^i \varepsilon^{n+1} = S_{\{i\}} \varepsilon^{n+1}$, wenn man $S_p = S_1 \varepsilon^{n+1} \eta^{n+2}$

setzt und mit $\{i\} = i-1 \pmod{p}$ bezeichnet.

Beweis: (I) Man beweist zunächst die folgende Behauptung.

Behauptung: Für jedes Paar (k, l) $k, l = 1, \dots, p$ existiert eine Ausfüllung $U_{k,l}$ der $(n, n+3)$ -Tüte $(\psi_{n+2} \dots \psi_{n+2}, S_1 \varepsilon^{n+1}, S_k \varepsilon^{n+1}, \psi_{n+2}, \psi_{n+2})$ in K der-art, dass $U_{k,l} \varepsilon^n = S_{\{k+l\}} \varepsilon^{n+1}$.

Beweis: (1) Sei $l = 1$ und k beliebig.

Ist S_{k1} eine Ausfüllung der $(n+3, n+4)$ -Tüte

$(\psi_{n+3} \dots \psi_{n+3}, S_1 \varepsilon^{n+1} \eta^{n+2}, S_k, S_k \varepsilon^{n+1} \eta^{n+1}, S_k \varepsilon^{n+1} \eta^n, S_1 \varepsilon^{n+1} \eta^{n-1})$, so ist

$$U_{k,1} = S_{k1} \varepsilon^{n+3}.$$

(2) Ist $U_{k,l}$ schon für festes $l \geq 1$ und k beliebig konstruiert, so ist $U_{k,l+1} = S_{kl+1} \varepsilon^{n+3}$

wenn S_{kl+1} eine Ausfüllung der $(n+3, n+4)$ -Tüte $(\psi_{n+3} \dots \psi_{n+3}, S_1, S_{\{k+l\}}, S_k \varepsilon^{n+1} \eta^{n+1}, U_{k,l}, S_1 \varepsilon^{n+1} \eta^{n-1})$ ist.

(II) Für $i = 1$ ist Lemma (5.1) trivial erfüllt.

Es sei schon für ein festes $i \geq 1$ und alle

1 bewiesen. Nach Definition der Multiplikation ist $S_1^{i+1} \varepsilon^{n+1} = \tau \varepsilon^n$, wenn τ eine Ausfüllung der $(n, n+3)$ -Tüte $(\psi_{n+2} \dots \psi_{n+2}, S_1^i \varepsilon^{n+1}, S_1 \varepsilon^{n+1}, \psi_{n+2}, \psi_{n+2}) = (\psi_{n+2} \dots \psi_{n+2}, S_{\{1\}} \varepsilon^{n+1}, S_1 \varepsilon^{n+1}, \psi_{n+2}, \psi_{n+2})$ in K ist.

Wählt man nach (I) $\tau = U_{1, \{1\}}$ so gilt

$$S_1^{i+1} \varepsilon^{n+1} = S_{\{(1+1)\}} \varepsilon^{n+1}.$$

Bei allen folgenden Betrachtungen ist die Potenzbildung immer im Sinne von Lemma (5.1) zu verstehen.

In Lemma (5.2) wird nun gezeigt, dass auch für Homotopien und Produktbildungen entsprechende Potenzen konstruiert werden können.

Lemma (5.2): Es seien $[(S_{j1} \dots S_{jp-1})] \in \pi_{n+3}(K, \psi; \mathbb{Z}_p)$ und

$(T_1 \dots T_{p-1})$ ein $(n+1)$ -Simplex aus $K(p)$ mit

$$(T_1 \dots T_{p-1}) \varepsilon^{n+2-j} = (S_{j1} \dots S_{jp-1}) \quad j = 1, 2, 3$$

$$(T_1 \dots T_{p-1}) \varepsilon^1 = (\psi_{n+3} \dots \psi_{n+3}) \quad 1 \leq n-2$$

Für jedes $i \geq 1$ existiert ein $(n+1)$ -Simplex

$(T_1^i \dots T_{p-1}^i)$ in $K(p)$, so dass für $l = 1, \dots, p-1$

$$T_1^i \varepsilon^{n+4} = T_{\{1\}} \varepsilon^{n+2}$$

$$T_l^i \varepsilon^{n+3} = T_{\{i(1+1)\}} \varepsilon^{n+2}$$

$$T_l^i \varepsilon^{n+2} = T_{\{1\}} \varepsilon^{n+2}$$

$$T_1^i \varepsilon^{n+1} = S_{11}^i$$

$$T_1^i \varepsilon^n = S_{21}^i$$

$$T_1^i \varepsilon^{n-1} = S_{31}^i$$

$$T_1^i \varepsilon^j = \psi_{n+3} \quad 0 \leq j \leq n-2$$

Dabei setzt man $T_p = T_1 \varepsilon^{n+2} \eta^{n+3}$.

Beweis: Wegen Lemma (2.4) ist Lemma (5.2) bewiesen, wenn gezeigt ist, dass für die Zerlegungspaare (T_1^1, T_1^2) die entsprechende Behauptung gilt.

Behauptung 1: Für jedes $i \geq 1$ und $l = 1, \dots, p-1$ existieren zwei Ausfüllungen T_1^{1i} und T_1^{2i} der

$(n+2, n+4)$ -Tüten $(\psi_{n+3} \dots \psi_{n+3}, S_{11}^i, S_{21}^i, T_{\{i(1+1)\}}^2 \varepsilon^{n+1}, T_{\{i1\}}^2 \varepsilon^{n+1})$ und $(\psi_{n+3} \dots \psi_{n+3}, S_{1\{i1\}} \varepsilon^{n+1} \eta^n, T_{\{i1\}}^2 \varepsilon^{n+1}, S_{31}^i, S_{3\{i1\}} \varepsilon^{n+1} \eta^{n+2})$ derart, dass $T_1^{1i} \varepsilon^{n+2} = T_1^{2i} \varepsilon^{n+2}$.

Man beweist nun zunächst die folgende Behauptung.

Behauptung: Sind für $j = 1, 2, 3$ die Ausfüllungen S_{kl+1}^j definiert wie im Beweis von Lemma (5.1) und ist $U_{k,l+1}^j = S_{kl+1}^j \varepsilon^{n+3}$, so gilt:

für jedes Paar (k, l) $k, l = 1, \dots, p-1$ existieren zwei Ausfüllungen V_{kl}^1 und V_{kl}^2 der $(n+1, n+4)$ -Tüten

$\Sigma_{kl}^1 = (\psi_{n+3} \dots \psi_{n+3}, T_1^2 \varepsilon^{n+1}, T_{\{k+1\}}^2 \varepsilon^{n+1}, U_{k,l}^2, U_{k,l}^3, \psi_{n+3})$ und

$$\sum_{kl}^2 = (\psi_{n+3} \dots \psi_{n+3}, s_{11} \varepsilon^{n+1} \gamma^{n-1}, u_{k,l}^1, t_k^2 \varepsilon^{n+1}, \\ , s_{3k} \varepsilon^{n+1} \gamma^{n+1}, \psi_{n+3}),$$

so dass $v_{kl}^1 \varepsilon^{n+1} = v_{kl}^2 \varepsilon^{n+1}$.

Beweis: (I) Sei $l = 1$, k beliebig und v_{k1}^2 eine Ausfüllung von $\sum_{k1}^2$.

Man betrachtet nun die folgenden Tüten in K :

- (1) die $(n+1, n+5)$ -Tüten $(\psi_{n+4} \dots \psi_{n+4}, \\ , s_{11} \varepsilon^{n+1} \gamma^{n+2} \gamma^{n-1}, s_{k1}^1, t_k^2 \varepsilon^{n+1} \gamma^{n+2}, \\ , t_k^2 \varepsilon^{n+1} \gamma^{n+1}, v_{k1}^2, s_{11} \varepsilon^{n+1} \gamma^{n-1} \gamma^n)$ mit Ausfüllung ϖ_{k1}^1
- (2) die $(n+3, n+5)$ -Tüten $(\psi_{n+4} \dots \psi_{n+4}, \\ , s_{31} \varepsilon^{n+1} \gamma^{n+2} \gamma^{n+3}, t_k^2, t_k^2 \varepsilon^{n+1} \gamma^{n+1}, \\ , t_k^2 \varepsilon^{n+1} \gamma^n, s_{k1}^3, s_{31} \varepsilon^{n+1} \gamma^{n+2} \gamma^{n-1})$ mit Ausfüllung ϖ_{k1}^2
- (3) die $(n+4, n+5)$ -Tüten $(\psi_{n+4} \dots \psi_{n+4}, \\ , t_1^2 \varepsilon^{n+1} \gamma^{n+3}, t_{\{k+1\}}^1, \varpi_{k1}^1 \varepsilon^{n+1}, s_{k1}^2, \varpi_{k1}^2 \varepsilon^{n+3}, \\ , t_1^2 \varepsilon^{n+1} \gamma^{n-1})$ mit Ausfüllung ϖ_{k1}^3 .

$v_{k1}^2 = \varpi_{k1}^3 \varepsilon^{n+4}$ ist dann die gesuchte Ausfüllung für $l = 1$.

(II) Seien v_{kl}^1 und v_{kl}^2 schon bestimmt für ein $l \geq 1$ und $k = 1, \dots, p-1$ und sei v_{kl+1}^2 eine beliebige

ge Ausfüllung von $\sum_{kl+1}^2$, so bildet man:

(1) die $(n+1, n+5)$ -Tüten $(\psi_{n+4} \dots \psi_{n+4}, S_{11} \eta^{n-1},$
 $, s_{kl+1}^1, T_k^2 \varepsilon^{n+1} \eta^{n+2}, v_{kl}^2, v_{kl+1}^2,$
 $, S_{11} \varepsilon^{n+1} \eta^{n-1} \eta^n)$ mit Ausfüllung σ_{kl+1}^1

(2) die $(n+3, n+5)$ -Tüten $(\psi_{n+4} \dots \psi_{n+4}, T_1^2,$
 $, T_{k+1}^2, v_{kl}^1 \varepsilon^{n+1} \eta^{n+1}, v_{kl}^1, s_{kl+1}^3,$
 $, S_{31} \varepsilon^{n+1} \eta^{n+2} \eta^{n-1})$ mit Ausfüllung σ_{kl+1}^2

(3) die $(n+4, n+5)$ -Tüten $(\psi_{n+4} \dots \psi_{n+4}, T_1^1,$
 $, T_{k+1}^1, \sigma_{kl+1}^1, s_{kl+1}^2, \sigma_{kl+1}^2 \varepsilon^{n+3},$
 $, T_1^2 \varepsilon^{n+1} \eta^{n-1})$ mit Ausfüllung σ_{kl+1}^3 .

Es gilt dann $v_{kl+1}^1 = \sigma_{kl+1}^3 \varepsilon^{n+4}$.

Beweis von Behauptung 1: Für $i = 1$ und $l = 1, \dots, p-1$ ist die Behauptung trivial erfüllt.

Seien die Simplexe T_1^{1i}, T_1^{2i} schon konstruiert für ein festes $i \geq 1$ und $l = 1, \dots, p-1$. Sei ausserdem für $j = 1, 2, 3$ ($\sigma_{j1}^{i+1} \dots \sigma_{jp-1}^{i+1}$) eine Ausfüllung der $(n, n+1)$ -Tüte $(\bar{\psi}_n \dots \bar{\psi}_n, (S_{j1} \dots S_{jp-1})^i, (S_{j1} \dots S_{jp-1}))$ in $K(p)$ entsprechend Lemma (5.1).

Wir betrachten nun die folgenden Tütenbildungen in K :

(1) die $(n+1, n+4)$ -Tüten $(\psi_{n+3} \dots \psi_{n+3}, S_{1\{il\}} \varepsilon^{n+1} \eta^{n-1},$
 $U_{1,\{il\}}^1, T_1^2 \varepsilon^{n+2}, S_{3\{l+1\}} \varepsilon^{n+1} \eta^{n+1}, S_{31} \varepsilon^{n+1} \eta^{n+1})$
 mit Ausfüllung σ_{il}^1

(2) die $(n+1, n+5)$ -Tüten $(\psi_{n+4} \dots \psi_{n+4}, s_{11}^1 \gamma^{n-1},$
 $\delta_{11}^{1+1}, \tau_{11}^1, \sigma_{11}^1, v_{\{1+1\}\{1+1\}}^2, v_{1\{1\}}^2)$
 mit Ausfüllung τ_{11}^1

(3) die $(n+2, n+5)$ -Tüten $(\psi_{n+4} \dots \psi_{n+4},$
 $s_{1\{11\}} \varepsilon^{n+1} \gamma^{n-1} \gamma^n, u_{1,\{11\}}^1, v_{1\{11\}}^2, \tau_{11}^2, s_{31} \gamma^{n+2},$
 $s_{31} \varepsilon^{n+1} \gamma^{n+2} \gamma^{n+3})$
 mit Ausfüllung τ_{11}^2

(4) die $(n+1, n+5)$ -Tüten $(\psi_{n+4} \dots \psi_{n+4},$
 $s_{1\{11\}} \varepsilon^{n+1} \gamma^n \gamma^{n-1}, u_{1,\{11\}}^1 \gamma^{n+1}, \tau_{11}^2 \varepsilon^{n+2}, \sigma_{11}^1,$
 $s_{31} \gamma^{n+1}, s_{31} \varepsilon^{n+1} \gamma^{n+2} \gamma^{n+1})$
 mit Ausfüllung τ_{11}^3

(5) die $(n, n+4)$ -Tüten $(\psi_{n+3} \dots \psi_{n+3}, \tau_{11}^{21} \varepsilon^{n+2},$
 $\sigma_{11}^1 \varepsilon^{n+1}, u_{1,\{11\}}^2, u_{\{1+1\},\{1(1+1)\}}^3, u_{1,\{1\}}^3)$
 mit Ausfüllung σ_{11}^2

(6) die $(n, n+5)$ -Tüten $(\psi_{n+4} \dots \psi_{n+4}, \tau_{11}^{11}, \tau_{11}^1 \varepsilon^{n+1},$
 $\delta_{21}^{1+1}, \sigma_{11}^2, v_{\{1+1\}\{1(1+1)\}}^1, v_{1\{1\}}^1)$
 mit Ausfüllung τ_{11}^4 und
 $(\psi_{n+4} \dots \psi_{n+4}, \tau_{11}^{21}, \tau_{11}^3 \varepsilon^{n+1}, v_{1\{11\}}^1, \sigma_{11}^2, \delta_{31}^{1+1},$
 $u_{1,\{1\}}^3 \gamma^{n+3})$
 mit Ausfüllung τ_{11}^5 .

$\tau_{11}^4 \varepsilon^n = \tau_1^{11+1}$ und $\tau_{11}^5 \varepsilon^n = \tau_1^{21+1}$ sind dann die gesuchten Paare für $l = 1, \dots, p-1$ und $i+1$.

Damit sind alle Hilfsmittel zusammengestellt, um die Existenz der gesuchten natürlichen Homomorphismen zu beweisen.

Satz (5.3): (I) Seien Z_p und Z_q zwei endlich zyklische Gruppen mit (1) $p = m \cdot q$ oder (2) $q = m \cdot p$ (m ganzzahlig) und $(S_1 \dots S_{p-1}) \in \Gamma_n(K(p), \bar{\psi})$.

Die Zuordnung

$$h(S_1 \dots S_{p-1}) = \begin{cases} (S_1^m \dots S_{q-1}^m) & \text{für (1)} \\ \underbrace{(S_1 \dots S_{p-1}, S_1 \varepsilon^{n+1} \varepsilon^{n+2}, \dots, S_1 \dots S_{p-1},}_{n+1 \quad n+2} \underbrace{S_1 \dots S_{p-1}}_{m-1}) & \text{für (2)} \end{cases}$$

definiert einen natürlichen Homomorphismus

$$\bar{h}: \pi_n(K, \psi; Z_p) \longrightarrow \pi_n(K, \psi; Z_q) .$$

(II) für $(S) \in \Gamma_n(K(\mathbb{Z}), \bar{\psi})$ definiert die Zuordnung

$$h(S) = (\psi_{n+3} \dots \psi_{n+3}, S)$$

einen natürlichen Homomorphismus

$$\bar{h}: \pi_n(K, \psi; Z_\infty) \longrightarrow \pi_n(K, \psi; Z_p) .$$

Beweis: (1) Da mit $(S_1 \dots S_{p-1})$ auch $(S_1^m \dots S_{p-1}^m) = (S_1 \dots S_{p-1})^m$ eine Sphäre in $K(p)$ ist, bleibt zu zeigen, dass für die Teilfolge $(S_1^m \dots S_{q-1}^m)$ auch die Ketten-

bedingung (K.3) erfüllt ist. Nach Lemma (5.1) ist aber $S_{q-1}^m \varepsilon^{n+2} = S_q^m \varepsilon^{n+1} = S_{\{mq\}} \varepsilon^{n+1} = S_p \varepsilon^{n+1} = S_{p-1} \varepsilon^{n+2} = \psi_{n+2}$.

Entsprechend folgt aus Lemma (5.2), dass für jede Homotopie $(T_1 \dots T_{p-1})$ zwischen $(S_{11} \dots S_{1p-1})$ und $(S_{21} \dots S_{2p-1})$ die Folge $(T_1^m \dots T_{q-1}^m)$ eine Homotopie herstellt zwischen $(S_{11}^m \dots S_{1q-1}^m)$ und $(S_{21}^m \dots S_{2q-1}^m)$ und dass aus $(S_{21} \dots S_{2p-1}) = (S_{31} \dots S_{3p-1})(S_{11} \dots S_{1p-1})$ folgt $(S_{21}^m \dots S_{2q-1}^m) = (S_{31}^m \dots S_{3q-1}^m)(S_{11}^m \dots S_{1q-1}^m)$.

(2) In den Fällen (2) und (II) folgen die entsprechenden Eigenschaften direkt aus den jeweiligen Definitionen.

(3) Ist $f: (K, \psi) \longrightarrow (L, \phi)$ eine c.s.s.-Abbildung, so gilt in allen drei Fällen $f_* \cdot \bar{h} = \bar{h} \cdot f_*$, d.h. $\bar{h}$ ist ein natürlicher Homomorphismus.

$$\begin{aligned} \text{Seien nun } G_1 &= \underbrace{Z_\infty \oplus \dots \oplus Z_\infty}_{r_1} \oplus G_{p_1}^1 \oplus \dots \oplus G_{p_s}^1 \oplus G_{p_{s+1}} \oplus \\ &\quad \oplus \dots \oplus G_{p_{s+t}} \\ G_2 &= \underbrace{Z_\infty \oplus \dots \oplus Z_\infty}_{r_2} \oplus G_{p_1}^2 \oplus \dots \oplus G_{p_s}^2 \oplus G_{q_1} \oplus \\ &\quad \oplus \dots \oplus G_{q_u} \end{aligned}$$

zwei endlich erzeugte abelsche Gruppen, wobei G_p die zur Primzahl p gehörende primäre Untergruppe von G bezeichnet, und

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} A & \bar{A}_{p_1} & \dots & \bar{A}_{p_s} & \bar{A}_{q_1} & \dots & \bar{A}_{q_u} \\ & A_{p_1} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & A_{p_s} & & & \end{pmatrix}$$

die den Homomorphismus $\varphi: G_1 \longrightarrow G_2$ beschreibende Matrix mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r_2} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r_1 1} & \dots & a_{r_1 r_2} \end{pmatrix} \quad A_{p_i} = \begin{pmatrix} d_{11}^i & \dots & d_{1n_i}^i \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ d_{v_i 1}^i & \dots & d_{v_i n_i}^i \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}_{p_i} = \begin{pmatrix} b_{11}^i & \dots & b_{1n_i}^i \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r_1 1}^i & \dots & b_{r_1 n_i}^i \end{pmatrix} \quad \bar{A}_{q_j} = \begin{pmatrix} e_{11}^j & \dots & e_{1s_j}^j \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ e_{r_1 1}^j & \dots & e_{r_1 s_j}^j \end{pmatrix}$$

Gehört d_{kl}^i zu den Invarianten p_i^k von $G_{p_i}^1$ und p_i^1 von $G_{p_i}^2$, so ist

$$d_{kl}^i = \begin{cases} c_{kl}^i & 0 \leq c_{kl}^i < p_i^1 & \text{für } k \geq 1 \\ c_{kl}^i p_i^{1-k} & 0 \leq c_{kl}^i < p_i^k & \text{für } k < 1 \end{cases}$$

Dann lässt sich der induzierte Homomorphismus φ_* von $\mathfrak{G}$

folgendermassen definieren:

Definition (5.4): Sei $\alpha \in \pi_n(K, \psi; G_1)$ für $n \geq 4$ und

$$\begin{aligned} & ((s_1) \dots (s_{r_1}), (s_1^{11} \dots s_{p_1^{11}}^{11} - 1) \dots \\ & \dots (s_1^{v_1 1} \dots s_{p_1^{v_1 1}}^{v_1 1} - 1), \dots, \\ & , (s_1^{1s+t} \dots s_{p_{s+t}^{1s+t}}^{1s+t} - 1) \dots \\ & \dots (s_1^{v_{s+t} s+t} \dots s_{p_{s+t}^{v_{s+t} s+t}}^{v_{s+t} s+t} - 1)) \text{ ein Repräsentant von } \alpha. \end{aligned}$$

Ist ausserdem h die in Satz (5.3) definierte Abbildung, so setzt man

$$\begin{aligned} \# \varphi(\alpha) = & [(s_1^{a_{11}} \dots s_{r_1^{a_{11}}}^{a_{11}}), \dots, (s_1^{a_{1r_1}} \dots s_{r_1^{a_{1r_1}}}^{a_{1r_1}}), \\ & , (h(s_1)^{b_{11}^1} \dots h(s_{r_1})^{b_{r_1}^1} h(s_1^{11} \dots s_{p_1^{11}}^{11} - 1)^{c_{11}^1} \dots \\ & \dots h(s_1^{v_1 1} \dots s_{p_1^{v_1 1}}^{v_1 1} - 1)^{c_{v_1 1}^1}), \dots, \\ & , (h(s_1)^{b_{11}^s} \dots h(s_{r_1})^{b_{r_1}^s} h(s_1^{1s} \dots s_{p_s^{1s}}^{1s} - 1)^{c_{1s}^s}, \\ & \dots h(s_1^{v_s s} \dots s_{p_s^{v_s s}}^{v_s s} - 1)^{c_{v_s s}^s}), (h(s_1)^{e_{11}^1} \dots \\ & \dots h(s_{r_1})^{e_{r_1}^1}), \dots, (h(s_1)^{e_{1s}^u} \dots h(s_{r_1})^{e_{r_1}^u})] \end{aligned}$$

Wegen Satz (5.3) ist $\# \varphi: \pi_n(K, \psi; G_1) \longrightarrow \pi_n(K, \psi; G_2)$ ein natürlicher Homomorphismus.

Satz (5.5): (universeller Koeffizientensatz)

Für $n > 3$ existiert eine natürliche exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \pi_n(K, \psi) \otimes G \longrightarrow \pi_n(K, \psi; G) \longrightarrow \pi_{n-1}(K, \psi) * G \longrightarrow 0$$

Beweis: Da $\pi_n(K, \psi) \otimes G \approx \sum_1^r \pi_n(K, \psi) \otimes Z_\infty \oplus \sum_1^s \pi_n(K, \psi) \otimes Z_{p_i}$

$$\pi_n(K, \psi) * G \approx \sum_1^r \pi_n(K, \psi) * Z_\infty \oplus \sum_1^s \pi_n(K, \psi) * Z_{p_i}$$

genügt es wegen Satz (3.3), den Beweis für

(1) $G = Z_\infty$ (2) $G = Z_p$ zu führen.

(1) Für $G = Z_\infty$ ist die Behauptung trivial, da

$$\pi_n(K, \psi) \otimes Z_\infty \approx \pi_n(K, \psi)$$

$$\pi_n(K, \psi; Z_\infty) \approx \pi_n(K, \psi)$$

$$\pi_{n-1}(K, \psi) * Z_\infty = 0$$

(2) Für $G = Z_p$ betrachtet man nun die folgende Sequenz $\mathcal{V}$:

$$\frac{\partial_*}{\partial_*} \pi_n(K, \psi) \xrightarrow{p} \pi_n(K, \psi) \xrightarrow{\bar{h}} \pi_n(K, \psi; Z_p) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(K, \psi) \xrightarrow{p}$$

$$\text{mit } p[(S)] = [(S^p)] \quad (S) \in \Gamma_n(K, \psi)$$

$$\bar{h}[(S)] = [(\psi_n \dots \psi_n, S)]$$

$$\partial_*[(S_1 \dots S_{p-1})] = [(S_1 \epsilon^{n-2})]$$

$$(S_1 \dots S_{p-1}) \in \Gamma_{n-3}(K(p), \bar{\psi}).$$

Behauptung: $\mathcal{V}$ ist exakt.

Beweis: (1) Es ist $h \cdot p [(S)] = [(\psi_n \dots \psi_n, S^p)]$

für gewisse Simplexe $T_1, \dots, T_{p-1} \in K_{n+1}$ mit

$$T_1 \in^{n+1} = S$$

$$T_1 \in^n = S^{1+1}$$

$$T_1 \in^{n-1} = S^1 \quad i = 1, \dots, p-1$$

$$T_1 \in^j = \psi_n \quad j < n-1$$

Ist ξ eine Ausfüllung der $(n, n+2)$ -Tüte

$(\psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, S^p \gamma^{n-1}, T_{p-1}, S^p \gamma^{n-2}, S \gamma^{n-1})$ in K

und $\bar{T}_{p-1} = \xi \in^n$, so ist $(T_1 \dots T_{p-2}, \bar{T}_{p-1})$ eine Ho-

motopie zwischen $(\psi_n \dots \psi_n, S^p)$ und $(\psi_n \dots \psi_n)$,

also $h \cdot p [(S)] = 0$.

(2) Ist $h[(S)] = 0$, so existiert ein Simplex

$(T_1 \dots T_{p-1})$ mit $(T_1 \dots T_{p-1}) \in^{n-2} = (\psi_n \dots \psi_n, S)$

$$(T_1 \dots T_{p-1}) \in^j = (\psi_n \dots \psi_n) \quad j < n-2$$

daraus folgt, dass für $i=1, \dots, p-1$ gilt

$$T_1 \in^{n-1} = (T_1 \in^{n-1})^1. \text{ Ist nun } \xi \text{ eine Ausfüllung}$$

der $(n-1, n+2)$ -Tüte $(\psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, S \gamma^{n-1}, T_{p-1},$

$S \gamma^{n-2}, T_1 \in^{n-1} \gamma^{n-1})$ in K , so ist

$$\xi \in^{n-1} \in^n = S = (T_1 \in^{n-1})^p, \text{ also } [(S)] =$$

$$= p [(T_1 \in^{n-1})].$$

$$(3) \partial_* \bar{h}[(S)] = [(\psi_{n-1})] = 0$$

(4) Ist $\partial_* [(S_1 \dots S_{p-1})] = [(S_1 \in^{n-2})] = 0$, so

existiert ein Simplex $U \in K_n$, so dass $U \in^j = \psi_{n-1}$

für $j \neq n-2$ und $U \varepsilon^{n-2} = S_1 \varepsilon^{n-2}$.

Man betrachtet nun die folgenden Tüten in K :

(a) die $(n, n+1)$ -Tüte $(\psi_n \dots \psi_n, S_1, U, U)$ mit Ausfüllung T_1

(b) für $j = 1, \dots, p-3$ die $(n, n+1)$ -Tüten

$(\psi_n \dots \psi_n, S_j, T_j \varepsilon^n, U)$ mit Ausfüllung T_{j+1}

(c) die $(n-3, n+1)$ -Tüte $(\psi_n \dots \psi_n, S_{p-1}, T_{p-2} \varepsilon^n, \psi_n, U)$ mit Ausfüllung T_{p-1} .

Es gilt dann $\bar{h} [(T_{p-1} \varepsilon^{n-3})] = [(S_1 \dots S_{p-1})]$.

(5) $p \cdot \partial_{\#} [(S_1 \dots S_{p-1})] = [(S_1 \varepsilon^{n-2})^p] = 0$, da für

$i=1, \dots, p-1$ $S_i \varepsilon^{n-2} = (S_1 \varepsilon^{n-2})^i$ und

$S_{p-1} \varepsilon^{n-1} = (S_1 \varepsilon^{n-2})^p = \psi_{n-1}$.

(6) Ist $p [(S)] = [(S^p)] = 0$, so existieren Simplexe

$T_1 \dots T_{p-1}$ mit

$$T_1 \varepsilon^{n+1} = S$$

$$T_i \varepsilon^n = S^{i+1}$$

$$T_i \varepsilon^{n-1} = S^i$$

$$T_i \varepsilon^j = \psi_n \quad j < n-1$$

für $i = 1, \dots, p-1$ und $T_{p-1} \varepsilon^n = \psi_n$, also ist

$$[(S)] = \partial_{\#} [(T_1 \dots T_{p-1})].$$

In der exakten Sequenz $\mathcal{O}$ gilt nun

Bild $\partial_{\#} = \text{Kern } p \approx \prod_{n-1}(K, \psi) * Z_p$ und

Bild $\bar{h} \approx \text{Kokern } p \approx \prod_n(K, \psi) \otimes Z_p$, woraus die Behauptung folgt.

Ist $f: (K, \psi) \longrightarrow (L, \phi)$ eine beliebige c.s.s.-Abbildung, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \xrightarrow{\partial_n} & \pi_n(K, \psi) & \xrightarrow{p} & \pi_n(K, \psi) & \xrightarrow{\bar{e}_n} & \pi_n(K, \psi; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\partial_n} & \pi_{n-1}(K, \psi) & \xrightarrow{p} \\
 & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & \\
 \xrightarrow{\partial_n} & \pi_n(L, \phi) & \xrightarrow{p} & \pi_n(L, \phi) & \xrightarrow{\bar{e}_n} & \pi_n(L, \phi; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\partial_n} & \pi_{n-1}(L, \phi) & \xrightarrow{p}
 \end{array}$$

kommutativ und, wie man sich leicht überlegt, damit auch das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & \pi_n(K, \psi) \otimes G & \longrightarrow & \pi_n(K, \psi; G) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(K, \psi) * G & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & \\
 0 \longrightarrow & \pi_n(L, \phi) \otimes G & \longrightarrow & \pi_n(L, \phi; G) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(L, \phi) * G & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

d.h. die exakte Sequenz ist natürlich.

6. Homotopiegruppen und Ko-Moore-Komplexe

Im folgenden Abschnitt soll jeder endlich erzeugten abelschen Gruppe G mit dem Invariantensystem $(r; p_1 \dots p_s)$ und jeder ganzen Zahl $n \geq 2$ ein Ko-Moore-Komplex $P(G, n)$ zugeordnet werden, d.h. ein c.s.s.-Komplex mit der Eigenschaft

$$H^v(P(G, n)) \approx \begin{cases} G & v = n \\ 0 & v \neq n \end{cases}.$$

Wir wollen dann zeigen, dass für einen beliebigen Kan-Komplex K mit Basispunkt ψ eine eindeutige Beziehung besteht zwischen den Homotopieklassen der c.s.s.-Abbildungen $f: (P(G, n), \phi) \longrightarrow (K, \psi)$ und den Elementen der Homotopiegruppe $\pi_n(K, \psi; G)$.

Dazu sei zunächst der Begriff der n -fachen reduzierten Einhängung eines c.s.s.-Komplexes L eingeführt. [2]

Definition (6.1): Ist L ein eineckiger c.s.s.-Komplex mit Ecke ϕ , so versteht man unter der n -fachen reduzierten Einhängung $S^n L$ von L den folgenden c.s.s.-Komplex:

(1) die r -Simplexe von $S^n L$ sind Folgen

$$(k_1 \dots k_n, \sigma) \text{ mit ganzzahligen } k_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ und } \sigma \in L_{r - \sum_1^n k_i}.$$

(2) es gelten die Relationen

$$(k_1 \dots k_n, \sigma) = (0 \dots 0, \phi_r), \text{ wenn eine der Zahlen } k_i = 0 \text{ ist,}$$

$$(k_1 \dots k_n, \phi_{r - \sum_1^n k_i}) = (0 \dots 0, \phi_r) \text{ für beliebige } k_i,$$

(3) Seitenbildung und Entartung sind gegeben durch

$$(k_1 \dots k_n, \sigma) \varepsilon^1 = \begin{cases} (k_1 \dots k_n, \sigma \varepsilon^1) \\ (k_1 \dots k_{j-1}, k_{j+1}, k_{j+1} \dots k_n, \sigma) \end{cases} \quad 0 \leq j \leq r$$

$$\text{wenn} \begin{cases} 1 \leq r - \sum_1^n k_i \\ r - \sum_1^j k_i < 1 \leq r - \sum_1^{j+1} k_i \end{cases}$$

$$(k_1 \dots k_n, \sigma) \gamma^1 = \begin{cases} (k_1 \dots k_n, \sigma \gamma^1) \\ (k_1 \dots k_{j-1}, k_{j+1}, k_{j+1} \dots k_n, \sigma) \end{cases} \quad 0 \leq j \leq r$$

$$\text{wenn} \begin{cases} 1 \leq r - \sum_1^n k_i \\ r - \sum_1^j k_i < 1 \leq r - \sum_1^{j+1} k_i \end{cases}$$

Definition (6.2): Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe mit den Invarianten $(r; p_1 \dots p_s)$.

Dann ist für $n > 2$ $P(G, n) = S^{n-2} P(G, 2)$, wobei $P(G, 2)$ den folgenden c.s.s.-Komplex bezeichnet:

(1) die n -Simplexe von $P(G, 2)$ sind für $n > 0$ die Folgen $[i, j_i, k_i, l_i, n]$

mit $i = 1, \dots, r+s$

$$j_i = \begin{cases} 1, \dots, p_i - 1 & \text{für } 0 \leq k_i < l_i < n \\ 1, \dots, p_i & \text{für } 0 \leq k_i = l_i < n \end{cases}$$

$p_i = 2$ für $i \leq r$

für $n=0$ die Folgen $[i, p_i, 0, 0, 0]$ mit

$$i = 1, \dots, r+s$$

(2) es werden für festes n alle Folgen $[i, p_i, k_i, l_i, n]$

für beliebiges i und k_i und alle Folgen

$[i, 1, k_i, l_i, n]$ für $i \leq r$ und beliebiges k_i identifiziert.

(3) Seitenbildung und Entartung sind gegeben durch

$$[i, j_i, k_i, l_i, n] \varepsilon^m =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} [i, p_i, 0, 0, n-1] \\ [i, 1, k_i, k_i, n-1] \\ [i, j_i, k_i, l_i, n-1] \\ [i, j_i+1, k_i, k_i, n-1] \\ [i, j_i, k_i, l_i-1, n-1] \\ [i, j_i, k_i-1, l_i-1, n-1] \\ [i, j_i, l_i-1, l_i-1, n-1] \\ [i, p_i, 0, 0, n-1] \end{array} \right\} \begin{array}{l} l_i < m \\ \\ \\ k_i \neq m \leq l_i \\ \\ m < k_i \\ \\ \end{array} \left\{ \begin{array}{l} k_i = l_i = n-1 \\ k_i < l_i = n-1 \\ l_i < n-1 \\ k_i = l_i - 1 \\ k_i < l_i - 1 \\ k_i > 0 \\ l_i > k_i = 0 \\ l_i = k_i = 0 \end{array} \right.$$

$$[i, j_i, k_i, l_i, n] \gamma^m =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} [i, j_i, k_i, l_i, n+1] \\ [i, j_i, k_i, l_i+1, n+1] \\ [i, j_i, k_i+1, l_i+1, n+1] \\ [i, p_i, 0, 0, 1] \end{array} \right\} \begin{array}{l} n > 0 \\ \\ \\ n = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} l_i < m \\ k_i \neq m \leq l_i \\ m \leq k_i \end{array} \right.$$

Lemma (6.3): $H^v(P(G, n)) \approx \begin{cases} G & v = n \\ 0 & v \neq n \end{cases}.$

Beweis: Da es zur Berechnung der Kohomologiegruppen genügt, nur die normalen Koketten zu betrachten, d.h. diejenigen, die allen entarteten γ -Simplexen aus $P(G,n)$ die $0 \in \mathbb{Z}_\infty$ zuordnet, soll zunächst untersucht werden, welche Simplexe in $P(G,n)$ nicht entartet sind.

Eine einfache Rechnung zeigt, dass der Komplex $P(G,2)$ eineckig ist und ausser den 1-Simplexen $[i, j_1, 0, 0, 1]$ für $i > r$ und $j_1 = 1, \dots, p_1 - 1$ und den 2-Simplexen $[i, j_1, 0, 1, 2]$ für $i = 1, \dots, r+s$ und $j_1 = 1, \dots, p_1 - 1$ nur entartete Simplexe enthält.

In $P(G,n)$ gibt es demnach nur in den Dimensionen n und $n-1$ nicht entartete Simplexe und zwar für $n-1$ die Simplexe $(1 \dots 1, [i, j_1, 0, 0, 1])$ für $i > r$ und $j_1 = 1, \dots, p_1 - 1$ und für n die Simplexe $(1 \dots 1, [i, j_1, 0, 1, 2])$ für $i = 1, \dots, r+s$ und $j_1 = 1, \dots, p_1 - 1$.

(1) Sei nun $\{f\} \in H^{n-1}(P(G,n))$, dann ist

$$f(\sigma) = \begin{cases} g_{ij_1} & \text{für } \sigma = (1 \dots 1, [i, j_1, 0, 0, 1]) \\ & i > r \text{ } j_1 = 1, \dots, p_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\delta f = 0$ d.u.n.d., wenn $g_{11} - g_{1j_1+1} - g_{ij_1} = 0$ für $i > r$ und $j_1 = 1, \dots, p_1 - 1$.

Daraus folgt für alle $i > r$: $p_1 g_{11} = 0$ also alle $g_{ij_1} = 0$ d.h. $f = 0$.

(2) Sei $\{f\} \in H^n(P(G,n))$. Dann gilt

$$f(\sigma) = \begin{cases} \varepsilon_{ij_1} & \text{für } \sigma = (1..1, [i, j_1, 0, 1, 2]) \\ & i = 1, \dots, r+s \quad j_1 = 1, \dots, p_1-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es existiert nun ein $\bar{f} \in \{f\}$, so dass

$$\bar{f}(1..1, [i, j_1, 0, 1, 2]) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{p_1-1} \varepsilon_{1i} & \text{für } j_1 = p_1-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sind $\bar{f}_1, \bar{f}_2 \in \{f\}$ wie oben, so existiert ein $\bar{h}$ mit $\bar{f}_1 - \bar{f}_2 = \delta \bar{h}$ und

$$\begin{aligned} \delta \bar{h}(1..1, [i, p_1-1, 0, 1, 2]) &= \sum_1^{p_1-1} \delta \bar{h}(1..1, [i, j_1, 0, 1, 2]) = \\ &= p_1 \cdot \bar{h}(1..1, [i, 1, 0, 0, 1]) \in \begin{cases} 0 & i \leq r \\ p_1 \cdot Z_\infty & i > r \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Damit gilt: } H^n(P(G, n)) &\approx \underbrace{Z_\infty \oplus \dots \oplus Z_\infty}_r \oplus Z_\infty / p_1 \cdot Z_\infty \oplus \dots \\ &\dots \oplus Z_\infty / p_s \cdot Z_\infty \approx G. \end{aligned}$$

Satz (6.4): Bezeichnet man mit ϕ die einzige Ecke

$(0..0, [i, p_1, 0, 0, 0])$ von $P(G, n)$, so gilt:

Für $n \geq 3$ und einen beliebigen Kan-Komplex K mit Basispunkt ψ besteht eine eindeutige Zuordnung h zwischen den Abbildungsklassen $\Pi[(P(G, n), \phi), (K, \psi)]$ der c.s.s.-Abbildungen $f: (P(G, n), \phi) \longrightarrow (K, \psi)$ und den Elementen von $\Pi_n(K, \psi; G)$.

Beweis: Da in $P(G, n)$ alle Simplexe Entartungen der Simplexe ϕ , $(1..1, [i, j_1, 0, 0, 1])$ und $(1..1, [i, j_1, 0, 1, 2])$ sind und die Simplexe ϕ und $(1..1, [i, j_1, 0, 0, 1])$ durch geeignete Seitenbildungen aus den Simplexen

$(1 \dots 1, [i, j_1, 0, 1, 2])$ hervorgehen, ist jede
c.s.s.-Abbildung $f: (P(G, n), \phi) \longrightarrow (K, \psi)$
vollständig bestimmt durch die Bilder

$$B_{ij_1} = f(1 \dots 1, [i, j_1, 0, 1, 2]) \text{ für } i = 1, \dots, r+s$$

$$j_1 = 1, \dots, p_1 - 1.$$

Entsprechend entstehen in $P(G, n) \times \Delta [1]$ alle
Simplexe durch Seitenbildung und Entartung aus
den Simplexen $((1 \dots 1, [i, j_1, 0, 1, 2])^k, \varepsilon_1 \gamma^0 \dots \hat{\gamma}^k \dots \gamma^n)$
für $i = 1, \dots, r+s$ $j_1 = 1, \dots, p_1 - 1$ $k = 0, \dots, n$
mit $\varepsilon_1: [1] \xrightarrow{\text{Identität}} [1]$.

(I) Sei $f: (P(G, n), \phi) \longrightarrow (K, \psi)$ eine c.s.s.-Abbil-
dung mit $B_{ij_1} = f(1 \dots 1, [i, j_1, 0, 1, 2])$ für
 $i = 1, \dots, r+s$ und $j_1 = 1, \dots, p_1 - 1$.

Ist (1) für $n \geq 4$ $\mathcal{S}_{i1}$ eine Ausfüllung der

$$(1, n+1)\text{-Tüte } (B_{i1} \varepsilon^0 \gamma^{n-1}, B_{i1} \varepsilon^0 \gamma^{n-2}, \psi_n,$$

$$, \dots, \psi_n, B_{i1} \varepsilon^0 \gamma^1, B_{i1}, B_{i1} \varepsilon^0 \gamma^0) \text{ und}$$

$$\mathcal{S}_{ij_1+1} \text{ für } j_1 = 1, \dots, p_1 - 2 \text{ eine Ausfül-}$$

$$\text{lung der } (1, n+1)\text{-Tüte } (\mathcal{S}_{ij_1} \varepsilon^1, B_{i1} \varepsilon^0 \gamma^{n-2},$$

$$, \psi_n \dots \psi_n, B_{ij_1}, B_{ij_1+1}, B_{i1} \varepsilon^0 \gamma^0)$$

(2) für $n = 3$ $\mathcal{S}_{i1}$ eine Ausfüllung der

$$(1, 4)\text{-Tüte } (B_{i1} \varepsilon^0 \gamma^2, B_{i1} \varepsilon^0 \gamma^1, B_{i1}, B_{i1} \varepsilon^0 \gamma^0)$$

$$\text{und } \mathcal{S}_{ij_1+1} \text{ für } j_1 = 1, \dots, p_1 - 2 \text{ eine}$$

Ausfüllung der (1,4)-Tüte

$$(\varepsilon_{ij_1} \varepsilon^{1, B_{ij_1}, B_{ij_1+1}, B_{i1}} \varepsilon^0 \eta^0),$$

so lässt sich die Zuordnung h folgendermassen definieren:

Definition: $h(f) = ((\varepsilon_{11} \varepsilon^1) \dots (\varepsilon_{r1} \varepsilon^1),$

$$(\varepsilon_{r+11} \varepsilon^1 \dots \varepsilon_{r+1p_1-1} \varepsilon^1) \dots (\varepsilon_{r+s1} \varepsilon^1 \dots \varepsilon_{r+sp_1-1} \varepsilon^1))$$

(II) Ist $\alpha = ((\varepsilon_{11}) \dots (\varepsilon_{r1}) (\varepsilon_{r+11} \dots \varepsilon_{r+1p_1-1}) \dots$

$\dots (\varepsilon_{r+s1} \dots \varepsilon_{r+sp_1-1}))$ ein Repräsentant einer Klasse

$[\alpha] \in \Pi_n(K, \psi; G)$, so definiert α eine c.s.s.-Ab-

bildung $f: (P(G, n), \phi) \longrightarrow (K, \psi)$ mit

$$f(1 \dots 1, [i, j_i, 0, 1, 2]) = \varepsilon_{ij_i} \varepsilon^n, \text{ wobei}$$

(1) für $n \geq 4$ ε_{i1} eine Ausfüllung der $(n, n+1)$ -Tüte

$$(\varepsilon_{i1} \varepsilon^{n-2} \eta^{n-1}, \varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i1} \varepsilon^{n-2} \eta^{n-2}, \psi_n, \dots$$

$$\dots, \psi_n, \varepsilon_{i1} \varepsilon^{n-2} \eta^1, \varepsilon_{i1} \varepsilon^{n-2} \eta^0) \text{ ist und}$$

ε_{ij_i+1} für $j_i = 1, \dots, p_i-2$ eine Ausfüllung

$$\text{der } (n, n+1)\text{-Tüte } (\varepsilon_{ij_i}, \varepsilon_{ij_i+1}, \varepsilon_{i1} \varepsilon^{n-2} \eta^{n-2},$$

$$, \psi_n \dots \psi_n, \varepsilon_{ij_i} \varepsilon^n, \varepsilon_{i1} \varepsilon^{n-2} \eta^0)$$

(2) für $n = 3$ ε_{i1} eine Ausfüllung der (3,4)-Tüte

$$(\varepsilon_{i1} \varepsilon^1 \eta^2, \varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i1} \varepsilon^1 \eta^1, \varepsilon_{i1} \varepsilon^1 \eta^0)$$

und ε_{ij_i+1} für $j_i = 1, \dots, p_i-2$ eine Ausfüllung

der (3,4)-Tüte

$$(s_{ij_1}, s_{ij_1+1}, \tau_{ij_1} \varepsilon^3, s_{i1} \varepsilon^1 \eta^0)$$

und es gilt: $h(f) = \alpha$.

(III) Behauptung: Sind $f_0, f_1: (P(G, n), \phi) \longrightarrow (K, \psi)$ zwei c.s.s.-Abbildungen und $h(f_0)$ bzw. $h(f_1)$ die zugehörigen Sphären in

$$[{}_n(K([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\psi})], \text{ so gilt:}$$

$$h(f_0) \sim h(f_1) \text{ d.u.n.d., wenn } f_0 \simeq f_1 \text{ rel } \phi.$$

Beweis: $F: P(G, n) \times \Delta[1] \longrightarrow K$ sei eine Homotopie zwischen f_0 und f_1 relativ ϕ und man bezeichne mit

$$B_{ij_1}^v = f_v(1 \dots 1, [i, j_1, 0, 1, 2]) \text{ für } v = 0, 1$$

$$i = 1, \dots, r+s$$

$$j_1 = 1, \dots, p_i - 1$$

$$G_{ij_1}^k = F((1 \dots 1, [i, j_1, 0, 1, 2]) \eta^k, \varepsilon_1^0 \dots \hat{\varepsilon}_1^k \dots \eta^n)$$

$$\text{für } k = 0, \dots, n$$

$$i = 1, \dots, r+s$$

$$j_1 = 1, \dots, p_i - 1$$

Dann betrachtet man die folgenden Tütenbildungen in K für $i = 1, \dots, r+s$ $j_1 = 1, \dots, p_i - 1$ und wählt dabei, wenn es möglich ist, als Ausfüllungen entartete Simplexe oder das vollständig entartete Simplex:

(1.1) die $(1, n+1)$ -Tüten

$$(B_{ij_1}^0 \varepsilon^0 \eta^2, \psi_n, B_{ij_1}^0 \varepsilon^0 \eta^0, G_{ij_1}^1 \varepsilon^0, \psi_n \dots \psi_n)$$

mit Ausfüllung $\varepsilon_{ij_1}^1$ und setzt $\varepsilon_{ip_i}^1 = \psi_{n+1}$ für $i = 1, \dots, r+s$

(1.2) die $(2, n+1)$ -Tüten

$$(\psi_n, G_{ij_1}^2 \varepsilon^0 \varepsilon^1 \eta^2, G_{ij_1}^2 \varepsilon^0 \varepsilon^1 \eta^1, G_{ij_1}^2 \varepsilon^0, \psi_n \dots \psi_n)$$

mit Ausfüllung $\sigma_{ij_1}^2$ und setzt $\sigma_{ip_i}^2 = \psi_{n+1}$
für $i=1, \dots, r+s$

(1.3) die $(3, n+1)$ -Tüten

$$(\psi_n, \psi_n, \sigma_{ij_1}^1 \varepsilon^1, \sigma_{ij_1}^2 \varepsilon^2, \psi_n \dots \psi_n)$$

mit Ausfüllung $\sigma_{ij_1}^3$ und setzt $\sigma_{ip_i}^3 = \psi_{n+1}$
für $i=1, \dots, r+s$

(1.4) die $(3, n+1)$ -Tüten

$$(\psi_n, \psi_n, \sigma_{ij_1}^3 \varepsilon^3, G_{ij_1}^3 \varepsilon^0, \psi_n \dots \psi_n)$$

mit Ausfüllung $\sigma_{ij_1}^4$ und setzt $\sigma_{ip_i}^4 = \psi_{n+1}$
für $i=1, \dots, r+s$

(2.1) die $(1, n+2)$ -Tüten

$$(B_{ij_i}^0 \eta^3, \sigma_{ij_i+1}^1, \sigma_{i1}^1, B_{ij_i}^0 \eta^0, G_{ij_i}^0, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1})$$

mit Ausfüllung $\tau_{ij_i}^1$

(2.2) die $(2, n+2)$ -Tüten

$$(\sigma_{ij_i}^1, G_{ij_i}^0 \varepsilon^1 \eta^3, \sigma_{i1}^2, G_{ij_i}^0 \varepsilon^1 \eta^1, G_{ij_i}^1, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1})$$

mit Ausfüllung $\tau_{ij_i}^2$

(2.3) die $(3, n+2)$ -Tüten

$$(\sigma_{ij_i}^2, \sigma_{ij_i+1}^2, G_{ij_i}^1 \varepsilon^2 \eta^3, G_{ij_i}^1 \varepsilon^2 \eta^2, G_{ij_i}^2, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1})$$

mit Ausfüllung $\tau_{ij_i}^3$

(2.4) die $(4, n+2)$ -Tüten

$$(\sigma_{ij_1}^1 \varepsilon^1 \eta^3, \sigma_{ij_1+1}^1 \varepsilon^1 \eta^2, \sigma_{i1}^3, \tau_{ij_1}^1 \varepsilon^1, \tau_{ij_1}^2 \varepsilon^2, \\ , \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}) \text{ mit Ausfüllung } \tau_{ij_1}^4$$

(2.5) die $(4, n+2)$ -Tüten

$$(\sigma_{ij_1}^3, \sigma_{ij_1+1}^3, \sigma_{i1}^3 \varepsilon^3 \eta^2, \tau_{ij_1}^4 \varepsilon^4, \tau_{ij_1}^3 \varepsilon^3, \psi_{n+1}, \\ , \dots, \psi_{n+1}) \text{ mit Ausfüllung } \tau_{ij_1}^5$$

(2.6) die $(4, n+2)$ -Tüten

$$(\sigma_{ij_1}^4, \sigma_{ij_1+1}^4, \sigma_{i1}^4, \tau_{ij_1}^5 \varepsilon^4, G_{ij_1}^3, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}) \\ \text{mit Ausfüllung } \tau_{ij_1}^6.$$

Setzt man für $i=1, \dots, r+s$ $j_1=1, \dots, p_i-1$ $\tau_{ij_1}^6 \varepsilon^4 = \tau_{ij_1}^3$
und $\sigma_{ij_1}^4 \varepsilon^3 = a_{ij_1}^3$, so gelten für $\tau_{ij_1}^3$ die folgenden
Seitenbeziehungen:

$$\tau_{ij_1}^3 \varepsilon^1 = \psi_n \quad 1 > 4$$

$$\tau_{ij_1}^3 \varepsilon^4 = G_{ij_1}^3 \varepsilon^4$$

$$\tau_{ij_1}^3 \varepsilon^3 = B_{ij_1}^0$$

$$\tau_{ij_1}^3 \varepsilon^2 = a_{i1}^3$$

$$\tau_{ij_1}^3 \varepsilon^1 = a_{ij_1+1}^3$$

$$\tau_{ij_1}^3 \varepsilon^0 = a_{ij_1}^3$$

und $a_{i1}^3 = \psi_n$ für $i \leq r$ und $a_{ip_i}^3 = \psi_n$ für $i = 1, \dots, r+s$

Angenommen es sind für $k \geq 3$ $i=1, \dots, r+s$ und $j_i=1, \dots, p_i-1$ schon Simplexe $T_{ij_i}^k$ und $a_{ij_i}^k$ konstruiert, so dass

$$T_{ij_i}^k \varepsilon^1 = \psi_n \quad \text{für } k+1 \leq 1 \leq n+1$$

$$T_{ij_i}^k \varepsilon^{k+1} = G_{ij_i}^k \varepsilon^{k+1}$$

$$T_{ij_i}^k \varepsilon^k = B_{ij_i}^0$$

$$T_{ij_i}^k \varepsilon^1 = \psi_n \quad \text{für } 2 \leq 1 \leq k$$

$$T_{ij_i}^k \varepsilon^2 = a_{i1}^k$$

$$T_{ij_i}^k \varepsilon^1 = a_{ij_i+1}^k$$

$$T_{ij_i}^k \varepsilon^0 = a_{ij_i}^k$$

und $a_{i1}^k = \psi_n$ für $i \leq r$ und $a_{ip_i}^k = \psi_n$ für $i=1, \dots, r+s$,

dann gewinnt man die entsprechenden Simplexe $T_{ij_i}^{k+1}$ und $a_{ij_i}^{k+1}$ auf folgendem Wege:

(3.1) Ist $\sigma_{ij_i}^5$ eine Ausfüllung der $(k-1, n+1)$ -Tüte

$$(\underbrace{\psi_n \dots \psi_n}_{k-2}, \underbrace{G_{ij_i}^{k+1} \varepsilon^0, a_{ij_i}^k, G_{ij_i}^{k+1} \varepsilon^0 \varepsilon^{k+1}}_k, \psi_n^{k-1}, \psi_n, \dots, \psi_n), \text{ so ist } a_{ij_i}^{k+1} = \sigma_{ij_i}^5 \varepsilon^{k-1}$$

(3.2) Ist $\tau_{ij_i}^7$ eine Ausfüllung der $(k, n+2)$ -Tüte

$$(\sigma_{ij_i}^5, \sigma_{ij_i+1}^5, \sigma_{i1}^5, \underbrace{\psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}}_{k-1}, \underbrace{G_{ij_i}^{k+1}, T_{ij_i}^k}_{k+1}, G_{ij_i}^{k+1} \varepsilon^{k+2} \psi_n^k, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}), \text{ so ist } T_{ij_i}^{k+1} = \tau_{ij_i}^7 \varepsilon^k$$

Damit gewinnt man schliesslich die Simplexe $T_{ij_i}^n$ und $a_{ij_i}^n$ mit den entsprechenden Eigenschaften.

Um von den Simplexen $T_{ij_i}^n$ zu der gesuchten Homotopie zwischen $h(f_0)$ und $h(f_1)$ zu gelangen, muss zunächst eine Zerlegung der Simplexe $T_{ij_i}^n$ in Paare ähnlich wie in Lemma (2.5) vorgenommen werden. Das geschieht durch die folgenden Tütenbildungen:

(4.1) die $(n, n+1)$ -Tüten

$$(a_{ij_i}^n, B_{ij_i}^1 \varepsilon^0 \eta^{n-1}, \psi_n \dots \psi_n, B_{ij_i}^1 \varepsilon^0 \eta^0)$$

mit Ausfüllung $\sigma_{ij_i}^6$ und setzt $\sigma_{ip_i}^6 = \psi_{n+1}$ für $i=1, \dots, r+s$

$$(a_{ij_i}^n, B_{ij_i}^1 \varepsilon^1 \eta^{n-1}, B_{i1}^1 \varepsilon^0 \eta^{n-1}, \psi_n \dots \psi_n, B_{ij_i}^1)$$

mit Ausfüllung $\sigma_{ij_i}^7$

(4.2) die $(n+1, n+2)$ -Tüten

$$(T_{ij_i}^n, \sigma_{ij_i}^7, \sigma_{ij_i+1}^6, \sigma_{i1}^6, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, B_{ij_i}^1 \eta^0)$$

mit Ausfüllung $\tau_{ij_i}^8$

$$(\sigma_{ij_i}^6, \sigma_{ij_i}^7, B_{ij_i}^1 \eta^n, B_{i1}^1 \varepsilon^0 \eta^{n-1} \eta^1, \psi_{n+1} \dots$$

$$\dots \psi_{n+1}, B_{ij_i}^1 \eta^1) \text{ mit Ausfüllung } \tau_{ij_i}^9$$

$T_{ij_i}^{1n} = \tau_{ij_i}^8 \varepsilon^{n+1}$ und $T_{ij_i}^{2n} = \tau_{ij_i}^9 \varepsilon^{n+1}$ sind nun die zu $T_{ij_i}^n$ gehörenden Zerlegungssimplexe.

Ist (5.1) τ_{i1}^{10} für $n \geq 4$ eine Ausfüllung der $(1, n+2)$ -Tüte

$(\sigma_{i1}^6 \varepsilon^n \gamma^n, \varsigma_{i1}^1, B_{i1}^1 \varepsilon^0 \gamma^{n-2} \gamma^1, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1},$
 $, B_{i1}^1 \varepsilon^0 \gamma^1 \gamma^2, T_{i1}^{2n}, \sigma_{i1}^6 \varepsilon^n \gamma^0)$
 und für $n = 3$ der $(1,5)$ -Tüte

$(\sigma_{i1}^6 \varepsilon^3 \gamma^3, \varsigma_{i1}^1, B_{i1}^1 \varepsilon^0 \gamma^1 \gamma^2, T_{i1}^{23}, \sigma_{i1}^6 \varepsilon^3 \gamma^0)$

(5.2) τ_{i1}^{11} für $n \geq 4$ eine Ausfüllung der $(2, n+2)$ -Tüte

$(\varsigma_{i1}^0, \tau_{i1}^{10} \varepsilon^1, \sigma_{i1}^6 \varepsilon^n \gamma^{n-1}, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1},$
 $, \sigma_{i1}^6 \varepsilon^n \gamma^2, T_{i1}^{1n}, \sigma_{i1}^6 \varepsilon^n \gamma^1)$

und für $n = 3$ der $(2,5)$ -Tüte

$(\varsigma_{i1}^0, \tau_{i1}^{10} \varepsilon^1, \sigma_{i1}^6 \varepsilon^3 \gamma^2, T_{i1}^{13}, \sigma_{i1}^6 \varepsilon^3 \gamma^1)$

(5.3) $\tau_{ij_i+1}^{10}$ für $j_i=1, \dots, p_i-2$ eine Ausfüllung der $(1, n+2)$ -Tüte

$(\tau_{ij_i}^{11} \varepsilon^2, \varsigma_{ij_i+1}^1, B_{i1}^1 \varepsilon^0 \gamma^{n-2} \gamma^1, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1},$
 $, T_{ij_i}^{2n}, T_{ij_i+1}^{2n}, \sigma_{i1}^6 \varepsilon^n \gamma^0)$ wenn $n \geq 4$ und der

$(1,5)$ -Tüte

$(\tau_{ij_i}^{11} \varepsilon^2, \varsigma_{ij_i+1}^1, T_{ij_i}^{23}, T_{ij_i+1}^{23}, \sigma_{i1}^6 \varepsilon^3 \gamma^0)$

wenn $n=3$

(5.4) $\tau_{ij_i+1}^{11}$ für $j_i=1, \dots, p_i-2$ eine Ausfüllung der

$(2, n+2)$ -Tüte

$(\varsigma_{ij_i+1}^0, \tau_{ij_i+1}^{10} \varepsilon^1, \sigma_{i1}^6 \varepsilon^n \gamma^{n-1}, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1},$
 $, T_{ij_i}^{1n}, T_{ij_i+1}^{1n}, \sigma_{i1}^6 \varepsilon^n \gamma^1)$ wenn $n \geq 4$ und der

$(2,5)$ -Tüte

$$(\sigma_{ij_1+1}^0, \tau_{ij_1+1}^{10}, \epsilon^1, \tau_{ij_1}^{13}, \tau_{ij_1+1}^{13}, \sigma_{i1}^6 \epsilon^3 \eta^1) \text{ für } n=3$$

dann ist die Folge

$$\chi = ((\tau_{11}^{11} \epsilon^2) \dots (\tau_{r1}^{11} \epsilon^2) (\tau_{r+11}^{11} \epsilon^2 \dots \tau_{r+1p_1-1}^{11} \epsilon^2) \dots \\ \dots (\tau_{r+s1}^{11} \epsilon^2 \dots \tau_{r+sp_1-1}^{11} \epsilon^2))$$

ein $(n-2)$ -Simplex aus $K([r]; p_1, \dots, p_s)$ mit

$$\chi \epsilon^1 = \bar{\psi}_{n-3} \quad 1 > 1$$

$$\chi \epsilon^1 = h(f_1)$$

$$\chi \epsilon^0 = h(f_0)$$

Die Existenz einer Homotopie zwischen $h(f_0)$ und $h(f_1)$ ergibt sich nun unmittelbar aus der folgenden Behauptung.

Behauptung: (L, ϕ) sei ein Kan-Komplex mit Basispunkt und $\sigma, \tau \in \Gamma_n(L, \phi)$.

Dann gilt: $\sigma \sim \tau$ d.u.n.d., wenn ein Simplex $\xi \in L_{n+1}$ existiert mit

$$\xi \epsilon^1 = \phi_n \quad 1 \neq i, i+1$$

$$\xi \epsilon^{1+1} = \tau$$

$$\xi \epsilon^1 = \sigma$$

für ein beliebiges $0 \leq i \leq n-1$

Beweis: $\sigma \sim \tau$ d.u.n.d., wenn ein Simplex $\xi \in L_{n+1}$ existiert mit $\xi \epsilon^{n+1} = \tau$

$$\xi \epsilon^n = \sigma$$

$$\xi \epsilon^1 = \phi_n \quad 1 < n$$

(1) Zu gegebenem ξ betrachtet man die $(n+1, n+2)$ -Tüte

$$(\phi_{n+1} \dots \phi_{n+1}, \underbrace{\xi}_{i}, \underbrace{\tau \eta^n}_{i+1}, \phi_{n+1} \dots \phi_{n+1}, \tau \eta^1) \text{ in } L.$$

Ist σ_i eine beliebige Ausfüllung, so ist $\sigma_i = \sigma_i \varepsilon^{n+1}$ ein Simplex der gesuchten Art.

(2) Ist σ_i gegeben, so ist $\sigma = \tau_i \varepsilon^i$, wenn τ_i eine Ausfüllung der $(i, n+2)$ -Tüte

$$(\phi_{n+1} \cdots \underbrace{\phi_{n+1}}_{i-1}, \underbrace{\tau_i^n}_{i+1}, \phi_{n+1} \cdots \phi_{n+1}, \sigma_i, \tau_i^i) \text{ in } K \text{ ist.}$$

Es ist nun eine leichte, wenn auch langwierige Aufgabe, zu zeigen, dass zum Beweis in der anderen Richtung sämtliche Konstruktionsschritte dieses Teiles umkehrbar sind, so dass man zu gegebenem Simplex γ Simplexe $G_{ij_i}^k$ finden kann, welche eine Homotopie

$$F: P(G, n) \times \Delta[1] \longrightarrow K$$

zwischen f_0 und f_1 definieren.

II. Homotopiegruppen mit Koeffizienten für beliebige c.s.s.-Komplexe

Kan hat in [2] bewiesen, dass man auch für beliebige zusammenhängende c.s.s.-Komplexe eine rein kombinatorische Definition der Homotopiegruppen angeben kann und zwar auf folgendem Wege:

Man ordnet zunächst jedem c.s.s.-Komplex K eine freie c.s.s.-Gruppe GK zu, den Loop-Komplex von K . Da nach J.C.Moore [6] jede c.s.s.-Gruppe ein Kan-Komplex ist, kann man auf GK die alten Definitionen anwenden und setzt dann für K : $\pi_n(K, \varphi) = \pi_{n-1}(GK, e_0)$.

Diese Definition wird dadurch gerechtfertigt, dass für jeden Kan-Komplex K $\pi_{n-1}(GK, e_0)$ zu der ursprünglich definierten Homotopiegruppe $\pi_n(K, \varphi)$ isomorph ist.

Es soll nun gezeigt werden, dass auch für eine beliebige endlich erzeugte abelsche Gruppe G die Homotopiegruppen $\pi_n(K, \varphi; G)$ eines zusammenhängenden c.s.s.-Komplexes K durch die entsprechenden Homotopiegruppen seines Loop-Komplexes GK beschrieben werden können.

Dabei kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass K eineckig ist, da zu jedem zusammenhängenden c.s.s.-Komplex ein eineckiger von demselben Homotopietyp existiert.

7. Grundlagen [2]

Eine c.s.s.-Gruppe G ist ein c.s.s.-Komplex mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) für jedes $n \geq 0$ bilden die n -Simplexe aus G eine Gruppe G_n
- (2) die Operatoren $\varepsilon^i: G_n \longrightarrow G_{n-1}$ und $\gamma^i: G_n \longrightarrow G_{n+1}$ sind Homomorphismen für $0 \leq i \leq n$.

Eine c.s.s.-Gruppe heisst frei, wenn für jedes $n \geq 0$ G_n eine freie Gruppe ist.

Ist K ein eineckiger c.s.s.-Komplex mit Ecke $\mathcal{U}$, so ist die freie c.s.s.-Gruppe GK , der Loop-Komplex von K , in folgender Weise definiert:

Die Gruppe der n -Simplexe $G_n K$ ist die freie Gruppe mit

- (1) je einem erzeugenden Element $\bar{\sigma}$ für jedes $(n+1)$ -Simplex $\sigma \in K_{n+1}$,
- (2) einer Relation $\overline{\tau \gamma^n} = e_n$ für jedes n -Simplex $\tau \in K_n$.

Seitenbildung und Entartung sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} \varepsilon^i &= \overline{\sigma \varepsilon^i} & 0 \leq i < n \\ \bar{\sigma} \varepsilon^n &= \overline{\sigma \varepsilon^n}, \overline{\sigma \varepsilon^{n+1}}^{-1} \\ \bar{\sigma} \gamma^i &= \overline{\sigma \gamma^i} & 0 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Aus K und GK gewinnt man den Wegekomplex $EK = GK \times K$ von K , dessen n -Simplexe Paare $(\vartheta, \bar{\sigma})$ sind für $\vartheta \in G_n K$ und $\sigma \in K_n$ und dessen Seitenbildung und Entartung definiert sind durch

$$\begin{aligned}(\vartheta, \bar{\sigma}) \varepsilon^i &= (\vartheta \varepsilon^i, \bar{\sigma} \varepsilon^i) & 0 \leq i < n \\ (\vartheta, \bar{\sigma}) \varepsilon^n &= (\vartheta \varepsilon^n, \bar{\sigma}, \bar{\sigma} \varepsilon^n) \\ (\vartheta, \bar{\sigma}) \gamma^i &= (\vartheta \gamma^i, \bar{\sigma} \gamma^i) & 0 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Nach [2; Satz 7.1] gilt nun: Ist K ein Kan-Komplex und

$q(\xi) = (\xi, \psi_n)$ für $\xi \in G_n K$, $p(\xi, \vartheta) = \vartheta$ für
 $(\xi, \vartheta) \in E_n K$, so ist

$$(GK, e_0) \xrightarrow{q} (EK, (e_0, \psi)) \xrightarrow{p} (K, \psi).$$

eine Fasersequenz mit zusammenziehbarem Bündelkomplex,
d.h. mit $\pi_n(EK, (e_0, \psi)) = 0$ für $n \geq 0$.

8. Homotopiegruppen mit Koeffizienten für eineckige c.s.s.-Komplexe

Definition (8.1): Sei K ein eineckiger c.s.s.-Komplex mit Ecke ψ und G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe mit den Invarianten $(r; p_1 \dots p_s)$.

Dann setzt man für $n \geq 4$

$$\pi_n(K, \psi; G) = \pi_{n-1}(GK, e_0; G)$$

Es soll nun gezeigt werden, dass für jeden Kan-Komplex K die Definitionen (2.8) und (8.1) äquivalent sind. Das geschieht mit Hilfe des folgenden Lemmas:

Lemma (8.2): Ist (K, ψ) ein Kan-Komplex mit Basispunkt, so dass für ein $n \geq 3$ gilt: $\pi_n(K, \psi) = \pi_{n-1}(K, \psi) = 0$ so ist für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe G $\pi_n(K, \psi; G) = 0$.

Beweis: Wegen Satz (3.3) genügt es, die Behauptung für eine beliebige endlich zyklische Gruppe Z_p zu beweisen.

Sei $(S_1 \dots S_{p-1}) \in \Gamma_{n-3}(K(p), \bar{\psi})$. Dann existieren nach Voraussetzung für $l=1, \dots, p-1$ Simplexe $T_l \in K_n$, so dass $T_l \varepsilon^j = \psi_{n-1}$ für $j \neq n-2$

$$T_l \varepsilon^{n-2} = S_l \varepsilon^{n-2}.$$

Ausserdem setzen wir $T_p = \psi_n$.

Ist nun für $l=1, \dots, p-1$ S_l eine Ausfüllung der $(n-3, n+1)$ -Tüte $(\psi_n \dots \psi_n, S_l, T_l, T_{l+1}, T_p)$ in K ,

so ist $(s_1 \dots s_{p-1})$ in $K(p)$ eine Homotopie zwischen $(S_1 \dots S_{p-1})$ und $(s_1 \varepsilon^{n-3}, \dots, s_{p-1} \varepsilon^{n-3})$, mit $s_l \varepsilon^{n-3} \in \Gamma_n(K, \psi)$ für $l=1, \dots, p-1$.

Nun existieren wieder nach Voraussetzung für $l=1, \dots, p-1$ $(n+1)$ -Simplexe $U_l \in K_{n+1}$, so dass

$$U_l \varepsilon^j = \psi_n \quad \text{für } j \neq n-2$$

$$U_l \varepsilon^{n-2} = s_l \varepsilon^{n-3}.$$

$(U_1 \dots U_{p-1})$ ist dann in $K(p)$ eine Homotopie zwischen $(s_1 \varepsilon^{n-3}, \dots, s_{p-1} \varepsilon^{n-3})$ und $(\psi_n \dots \psi_n)$, d.h. $[(S_1 \dots S_{p-1})] = 0$.

Satz (8.3): Ist K ein eineckiger Kan-Komplex mit Ecke ψ und G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, so gilt für $n \geq 4$

$$\partial_n: \pi_n(K, \psi; G) \approx \pi_{n-1}(GK, e_0; G)$$

Beweis: In der exakten Homotopiesequenz

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{q_*} \pi_n(EK, (e_0, \psi); G) \xrightarrow{p_*} \pi_n(K, \psi; G) \xrightarrow{\partial_u} \\ &\xrightarrow{\partial_u} \pi_{n-1}(GK, e_0; G) \xrightarrow{q_*} \pi_{n-1}(EK(e_0, \psi); G) \xrightarrow{p_*} \end{aligned}$$

der Fasersequenz

$$(GK, e_0) \xrightarrow{q} (EK, (e_0, \psi)) \xrightarrow{p} (K, \psi)$$

ist wegen [2; Satz 7.1] und Lemma (8.2)

$$\pi_n(EK(e_0, \psi)) = 0 \quad \text{für } n \geq 3 \text{ und somit}$$

$$\partial_n: \pi_n(K, \psi; G) \approx \pi_{n-1}(GK, e_0; G) .$$

III. Relative Homotopiegruppen mit Koeffizienten

Unter einem Tripel (K, L, ψ) sei im folgenden immer verstanden ein Kan-Komplex K , ein Teilkomplex L von K , der ebenfalls der Kan-Bedingung genügt, und eine Ecke $\psi \in L_0$. Eine c.s.s.-Abbildung $f: (K, L, \psi) \longrightarrow (M, N, \phi)$ ist eine c.s.s.-Abbildung von K nach M , die L in N und ψ in ϕ überführt.

Sei $\mathfrak{K}' = \{ (K, L, \psi); f \}$ die Kategorie der Tripel (K, L, ψ) und der c.s.s.-Abbildungen f . Ist $(K, L, \psi) \in \mathfrak{K}'$, so ist für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe G mit den Invarianten $(r; p_1, \dots, p_s)$ auch

$$(K([r]; p_1, \dots, p_s), L([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\psi}) \in \mathfrak{K}'$$

Hat man nun für alle Tripel $(K, L, \psi) \in \mathfrak{K}'$ ganzzahlige Homotopiegruppen definiert, so kann man entsprechend Teil I relative Homotopiegruppen mit Koeffizienten erklären durch $\pi_n(K, L, \psi; G) = \pi_{n-3}(K([r]; p_1, \dots, p_s), L([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\psi})$.

Wir wollen deshalb zunächst eine kombinatorische Definition der ganzzahligen relativen Homotopiegruppen angeben und Eigenschaften derselben nachweisen.

9. Die ganzzahligen relativen Homotopiegruppen

Sei (K, L, ψ) ein Tripel aus $\mathfrak{K}'$ und

$$\Gamma_n(K, L, \psi) = \{ \sigma \in K_n / \sigma \tau^0 \in L, \sigma \tau^1 = \psi_{n-1} \text{ oder } 0 \}$$

für $n \geq 1$ die Menge der n -Sphären in (K, L, ψ) .

Definition (9.1): Zwei n -Sphären σ und $\tau \in \Gamma_n(K, L, \psi)$ heissen homotop ($\sigma \sim \tau$), wenn ein $(n+1)$ -Simplex $\varphi \in K_{n+1}$ existiert, so dass

$$\begin{aligned}\varphi \varepsilon^{n+1} &= \tau \\ \varphi \varepsilon^n &= \sigma \\ \varphi \varepsilon^i &= \psi_n \quad 0 < i < n \\ \varphi \varepsilon^0 &\in L_n\end{aligned}$$

Lemma (9.2): Für $\sigma, \tau \in \Gamma_n(K, L, \psi)$ gilt:

$\sigma \sim \tau$ d.u.n.d., wenn für jedes $i=1, \dots, n$ ein $(n+1)$ -Simplex $\varphi_i \in K_{n+1}$ existiert, so dass

$$\begin{aligned}\varphi_i \varepsilon^j &= \psi_n \quad j > i+1 \\ \varphi_i \varepsilon^{i+1} &= \tau \\ \varphi_i \varepsilon^i &= \sigma \\ \varphi_i \varepsilon^j &= \psi_n \quad 0 < j < i \\ \varphi_i \varepsilon^0 &\in L_n\end{aligned}$$

Beweis: (I) Sind die Simplexe φ_i gegeben, so ist φ_n die gesuchte Homotopie.

(II) Ist φ eine Homotopie zwischen σ und τ , so bildet man für $i=1, \dots, n-1$

- (1) die $(n, n+1)$ -Tüten $(\psi_n \dots \psi_n, \underbrace{\varphi \varepsilon^0 \varphi^{n-1}}_1, \psi_n \dots \psi_n, \tau \varepsilon^0 \varphi^{i-1})$ in L mit Ausfüllung α_i
- (2) die $(n+1, n+2)$ -Tüten $(\alpha_i, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, \underbrace{\varphi \varepsilon^0 \varphi^n}_{\varphi \varepsilon^{n+1}}, \psi_{n+1}, \dots, \psi_{n+1}, \tau \varepsilon^1)$ in K mit Ausfüllung β_i .

Dann ist für $i=1, \dots, n-1$ $S_i = \beta_i \varepsilon^{n+1}$ und

$$S_n = S.$$

Im folgenden werden auch die Simplexe S_i als Homotopien zwischen σ und τ bezeichnet.

Lemma (9.3): Die Homotopierelation induziert eine Klasseneinteilung in $\Gamma_n(K, L, \mathcal{U})$.

Beweis: (1) $\sigma \sim \sigma$ mit $S = \sigma \gamma^n$

(2) Ist $\sigma \sim \tau$ mit einer Homotopie S , so bildet man die $(n+1, n+1)$ -Tüte

$(\psi_n \dots \psi_n, S \varepsilon^0, \sigma \varepsilon^0 \gamma^{n-1})$ in L mit Ausfüllung δ_1 und die $(n+2, n+2)$ -Tüte

$(\delta_1, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, S, \sigma \gamma^n)$ in K mit Ausfüllung δ_2 .

Dann ist $\tau \sim \sigma$ mit der Homotopie $\delta_2 \varepsilon^{n+2}$.

(3) Ist $\sigma_1 \sim \sigma_2$ mit einer Homotopie S_1 und $\sigma_2 \sim \sigma_3$ mit einer Homotopie S_2 , so bildet man die $(n, n+1)$ -Tüte $(\psi_n \dots \psi_n, S_1 \varepsilon^0, S_2 \varepsilon^0)$ in L mit Ausfüllung δ_1 und die

$(n+1, n+2)$ -Tüte $(\delta_1, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, S_1, S_2)$ in K mit Ausfüllung δ_2 .

Dann ist $\sigma_1 \sim \sigma_3$ mit der Homotopie $\delta_2 \varepsilon^{n+1}$.

Ist $\sigma \in \Gamma_n(K, L, \mathcal{U})$ so bezeichnen wir mit $[\sigma]$ die Klasse von σ .

Definition (9.4): Seien $\sigma, \tau \in \Gamma_n(K, L, \mathcal{U})$ für $n \geq 2$.

Ist $\mathcal{S}_1$ eine Ausfüllung der $(n-1, n)$ -Tüte

$(\mathcal{U}_{n-1} \dots \mathcal{U}_{n-1}, \sigma \varepsilon^0, \tau \varepsilon^0)$ in L und $\mathcal{S}_2$ eine Ausfüllung der $(n, n+1)$ -Tüte

$(\mathcal{S}_1, \mathcal{U}_n \dots \mathcal{U}_n, \sigma, \tau)$ in K , so definiert man das Produkt von σ und τ durch $\sigma \circ \tau = \mathcal{S}_2 \varepsilon^n$.

Lemma (9.5): Die oben definierte Multiplikation induziert in der Menge der Äquivalenzklassen von $\Gamma_n(K, L, \mathcal{U})$ eine Gruppenstruktur.

Beweis: (1) Seien für $i = 1, 2$ $\sigma_i, \tau_i \in \Gamma_n(K, L, \mathcal{U})$ und

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sim \sigma_2 \quad \text{mit} \quad & \gamma_1 \varepsilon^{n+1} = \sigma_2 \\ & \gamma_1 \varepsilon^n = \sigma_1 \\ & \gamma_1 \varepsilon^i = \mathcal{U}_n \quad 0 < i < n \\ & \gamma_1 \varepsilon^0 \in L_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_1 \sim \tau_2 \quad \text{mit} \quad & \gamma_2 \varepsilon^{n+1} = \mathcal{U}_n \\ & \gamma_2 \varepsilon^n = \tau_2 \\ & \gamma_2 \varepsilon^{n-1} = \tau_1 \\ & \gamma_2 \varepsilon^i = \mathcal{U}_n \quad 0 < i < n-1 \\ & \gamma_2 \varepsilon^0 \in L_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ausserdem sei} \quad & \sigma_1 \circ \tau_1 = \mathcal{S}_2^1 \varepsilon^n \\ & \sigma_2 \circ \tau_2 = \mathcal{S}_2^2 \varepsilon^n \\ & \sigma_1 \circ \tau_2 = \mathcal{S}_2^3 \varepsilon^n \end{aligned}$$

Man betrachtet nun die folgenden Tütenbildungen in K und L :

- (1) die $(n, n+1)$ -Tüte $(\mu_n \dots \mu_n, s_2^1 \varepsilon^0, s_2^3 \varepsilon^0, \gamma_2 \varepsilon^0)$
in L mit Ausfüllung κ_1
- (2) die $(n-1, n+1)$ -Tüte $(\mu_n \dots \mu_n, \gamma_1 \varepsilon^0, s_2^3 \varepsilon^0, s_2^2 \varepsilon^0)$
in L mit Ausfüllung κ_2
- (3) die $(n+1, n+2)$ -Tüte $(\kappa_1, \mu_{n+1} \dots \mu_{n+1}, s_2^1, s_2^3, \gamma_2)$
in K mit Ausfüllung κ_3
- (4) die $(n, n+2)$ -Tüte $(\kappa_2, \mu_{n+1} \dots \mu_{n+1}, \gamma_1, s_2^3, s_2^2)$
in K mit Ausfüllung κ_4 .

Dann ist $\bar{\sigma}_1 \circ \tau_1 \sim \bar{\sigma}_1 \circ \tau_2$ mit der Homotopie $\kappa_3 \varepsilon^{n+1}$
und $\bar{\sigma}_1 \circ \tau_2 \sim \bar{\sigma}_2 \circ \tau_2$ mit der Homotopie $\kappa_4 \varepsilon^n$, d.h. die
Produktbildung ist bis auf Homotopie unabhängig von der
Auswahl der Repräsentanten und der bei der Konstruktion
auftretenden Ausfüllungen.

Nachweis der Gruppenaxiome: Sind $\bar{\sigma}, \tau \in \Gamma_n(K, L, \mu)$ und
ist $\mathfrak{s}_1$ eine Ausfüllung der $(n-2, n)$ -Tüte
 $(\mu_{n-1} \dots \mu_{n-1}, \bar{\sigma} \varepsilon^0, \tau \varepsilon^0)$ in L und $\mathfrak{s}_2$ eine Ausfüllung
der $(n-1, n+1)$ -Tüte $(\mathfrak{s}_1, \mu_n \dots \mu_n, \bar{\sigma}, \tau)$ in K , so gilt
 $[\mathfrak{s}_2 \varepsilon^{n-1}] \cdot [\tau] = [\bar{\sigma}]$. Die Auflösbarkeit der Gleichung
 $[\bar{\sigma}] [\xi] = [\tau]$ beweist man entsprechend.

Seien $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3 \in \Gamma_n(K, L, \mu)$ und $\bar{\sigma}_1 \circ \bar{\sigma}_2 = s_2^{1,2} \varepsilon^n$,
 $\bar{\sigma}_2 \circ \bar{\sigma}_3 = s_2^{2,3} \varepsilon^n$, $\bar{\sigma}_1(\bar{\sigma}_2 \circ \bar{\sigma}_3) = s_2^{1(2,3)} \varepsilon^n$.

Dann bildet man die folgenden Tüten in K und L :

- (1) die $(n, n+1)$ -Tüte $(\psi_n \dots \psi_n, s_2^{1,2} \varepsilon^0, s_2^{1(2,3)} \varepsilon^0, s_2^{2,3} \varepsilon^0)$ in L mit Ausfüllung δ_1
- (2) die $(n+1, n+2)$ -Tüte $(\chi_1, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, s_2^{1,2}, s_2^{1(2,3)}, s_2^{2,3})$ in K mit Ausfüllung δ_2 .
- Es ist nun $\chi_2 \varepsilon^{n+1} = s_2^{(1,2)} \beta$ und
- $$\chi_2 \varepsilon^{n+1} \varepsilon^n = (\beta_1 \circ \beta_2) \beta_3 = \beta_1 (\beta_2 \circ \beta_3).$$

Definition (9.6): Ist $(K, L, \psi) \in \mathfrak{Q}'$, so sind die relativen Homotopiegruppen $\pi_n(K, L, \psi)$ für $n \geq 1$ folgendermassen definiert:

- (1) die Elemente von $\pi_n(K, L, \psi)$ sind die Äquivalenzklassen $[\varepsilon]$ für $\varepsilon \in \Gamma_n(K, L, \psi)$,
- (2) die Produktbildung ist für $n \geq 2$ gegeben durch Definition (9.4).

Satz (9.7): $\pi_n(K, L, \psi)$ ist abelsch für $n > 2$.

Beweis: Seien $[\varepsilon_1], [\varepsilon_2] \in \pi_n(K, L, \psi)$ und $s_2^{1,2} \varepsilon^n = \varepsilon_1 \circ \varepsilon_2$

Dann bildet man:

- (1) die $(n, n+1)$ -Tüte
- $$(\psi_n \dots \psi_n, \varepsilon_2 \varepsilon^0 \varphi^{n-1}, s_2^{1,2} \varepsilon^0, \varepsilon_1 \varepsilon^0 \varphi^{n-2}, \varepsilon_2 \varepsilon^0 \varphi^{n-3})$$
- in L mit Ausfüllung δ_1 ,
- (2) die $(n-1, n+1)$ -Tüte
- $$(\psi_n \dots \psi_n, \varepsilon_2 \varepsilon^0 \varphi^{n-2}, \varepsilon_2 \varepsilon^0 \varphi^{n-2}, \varepsilon_1 \varepsilon^0 \varphi^{n-1}, \varepsilon_1 \varepsilon^0 \varphi^{n-1})$$
- in L mit Ausfüllung δ_2 ,

(3) die $(n-2, n+1)$ -Tüte

$$(\gamma_n \dots \gamma_n, \sigma_2 \varepsilon \circ \gamma^{n-2}, \gamma_2 \varepsilon^{n-1}, \gamma_1 \varepsilon^n, \\ , \sigma_1 \varepsilon \circ \gamma^{n-2}) \text{ in } L \text{ mit Ausfüllung } \gamma_3,$$

(4) die $(n+1, n+2)$ -Tüte

$$(\gamma_1, \gamma_{n+1} \dots \gamma_{n+1}, \sigma_2 \gamma^n, \sigma_2^{1,2}, \sigma_1 \gamma^{n-1}, \\ , \sigma_2 \gamma^{n-2}) \text{ in } K \text{ mit Ausfüllung } \gamma_4,$$

(5) die $(n, n+2)$ -Tüten

$$(\gamma_2, \gamma_{n+1} \dots \gamma_{n+1}, \sigma_2 \gamma^{n-1}, \sigma_2 \gamma^{n-1}, \\ , \sigma_1 \gamma^n, \sigma_1 \gamma^n) \text{ in } K \text{ mit Ausfüllung } \gamma_5,$$

(6) die $(n-1, n+2)$ -Tüte

$$(\gamma_3, \gamma_{n+1} \dots \gamma_{n+1}, \sigma_2 \gamma^{n-1}, \gamma_5 \varepsilon^n, \gamma_4 \varepsilon^{n+1}, \\ , \sigma_1 \gamma^{n-1}) \text{ in } K \text{ mit Ausfüllung } \gamma_6.$$

Es ist nun $\gamma_6 \varepsilon^{n-1} = \sigma_2^{2,1}$ und

$$\gamma_6 \varepsilon^{n-1} \varepsilon^n = \sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ \sigma_2.$$

Satz (9.8): Ist $\mathcal{G} = \{H, h\}$ die Kategorie der Gruppen H

und Homomorphismen h , so ist für jedes $n \geq 1$

$\pi_n(\alpha, \gamma, *)$ ein Funktor von $\mathcal{A}'$ in $\mathcal{G}$, d.h. zu je-

der c.s.s.-Abbildung $f: (K, L, \gamma) \longrightarrow (M, N, \phi)$

existiert ein induzierter Homomorphismus

$f_{\#}: \pi_n(K, L, \gamma) \longrightarrow \pi_n(M, N, \phi)$ mit den folgen-

den Eigenschaften:

- (1) Ist $i: (K, L, \gamma) \longrightarrow (K, L, \gamma)$ die Identität, so ist $i_{\#}$ die Identität.

(2) Sind $f: (K, L, \psi) \longrightarrow (M, N, \phi)$ und
 $g: (M, N, \phi) \longrightarrow (P, Q, \gamma)$ zwei c.s.s.-Abbil-
 dungen, so ist $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} f_{\#}$.

Beweis: Ist $f: (K, L, \psi) \longrightarrow (M, N, \phi)$ eine c.s.s.-Ab-
 bildung, so ist $f_{\#} [\sigma] = [f\sigma]$ für
 $[\sigma] \in \pi_n(K, L, \psi)$ der induzierte Homomorphis-
 mus, und die Eigenschaften (1) und (2) folgen
 unmittelbar.

Satz (9.9): Sind $f, g: (K, L, \psi) \longrightarrow (M, N, \phi)$ zwei homo-
 tope c.s.s.-Abbildungen, so gilt $f_{\#} = g_{\#}$.

Beweis: Sei $F: (K \times \Delta[1], L \times \Delta[1]) \longrightarrow (M, N)$ eine Ho-
 motopie zwischen f und g , so gilt

$$\begin{aligned} F \circ 0_K &= f & \text{für} & & 0_K(\sigma) &= (\sigma, \varepsilon_0^0 \gamma^0 \dots \gamma^{n-1}) \\ F \circ 1_K &= g & & & 1_K(\sigma) &= (\sigma, \varepsilon_1^0 \gamma^0 \dots \gamma^{n-1}) \\ F(\psi \gamma^0, \varepsilon_1) &= \phi \gamma^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \varepsilon_i^0[0] &= (i) \quad \text{für } i = 0, 1 \\ \varepsilon_1: [1] &\longrightarrow [1] \quad \text{Identität.} \end{aligned}$$

Betrachtet man nun für $[\sigma] \in \pi_n(K, L, \psi)$ und
 $i = 0, \dots, n$ die Bildsimplexe $G_i = F(\sigma \gamma^i, \varepsilon_1 \gamma^0 \dots \hat{\gamma}^i \dots \gamma^n)$
 so gilt für ihre Seiten
 $G_0 \varepsilon^j = \phi_n \quad \text{für } j > 1$
 $G_0 \varepsilon^1 = F(\sigma, \varepsilon_1 \gamma^1 \dots \gamma^{n-1})$
 $G_0 \varepsilon^0 = f(\sigma)$

$$\begin{aligned}
G_i \varepsilon^j &= \phi_n && \text{für } j > i+1 \\
G_i \varepsilon^{i+1} &= F(\sigma, \varepsilon_1 \eta^0 \dots \hat{\eta}^i \dots \eta^{n-1}) \\
0 < i < n \quad G_i \varepsilon^i &= F(\sigma, \varepsilon_1 \eta^0 \dots \hat{\eta}^{i-1} \dots \eta^{n-1}) \\
G_i \varepsilon^j &= \phi_n && \text{für } 0 < j < i \\
G_i \varepsilon^0 &= F(\sigma \varepsilon^0 \eta^{i-1}, \varepsilon_1 \eta^0 \dots \hat{\eta}^{i-1} \dots \eta^{n-1}) \in N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_n \varepsilon^{n+1} &= g(\sigma) \\
G_n \varepsilon^n &= F(\sigma, \varepsilon_1 \eta^0 \dots \eta^{n-2}) \\
G_n \varepsilon^j &= \phi_n && \text{für } 0 < j < n \\
G_n \varepsilon^0 &= F(\sigma \varepsilon^0 \eta^{n-1}, \varepsilon_1 \eta^0 \dots \eta^{n-2}) \in N
\end{aligned}$$

d.h., G_n ist in (M, N, ϕ) eine Homotopie zwischen $g(\sigma)$ und $F(\sigma, \varepsilon_1 \eta^0 \dots \eta^{n-2})$ und G_i für jedes $i > 0$ eine Homotopie zwischen $F(\sigma, \varepsilon_1 \eta^0 \dots \hat{\eta}^i \dots \eta^{n-1})$ und $F(\sigma, \varepsilon_1 \eta^0 \dots \hat{\eta}^{i-1} \dots \eta^{n-1})$, also

$$g(\sigma) \sim F(\sigma, \varepsilon_1 \eta^1 \dots \eta^{n-1}).$$

Es bleibt zu zeigen, dass das Simplex G_0 eine Homotopie zwischen $F(\sigma, \varepsilon_1 \eta^1 \dots \eta^{n-1})$ und $f(\sigma)$ herstellt.

Dazu bildet man die $(1, n+2)$ -Tüte

$(f(\sigma) \eta^n, \phi_{n+1} \dots \phi_{n+1}, f(\sigma) \eta^0, G_0)$ in M mit Ausfüllung ϑ . $\vartheta \varepsilon^1$ ist dann die gesuchte Homotopie.

Satz (9.10): Ist $p: (E, E_1, \chi) \longrightarrow (B, B_1, \psi)$ eine c.s.s.-Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $p: (E, \chi) \longrightarrow (B, \psi)$ ist eine Faserabbildung,

$$(2) p^{-1}(B_1) = E_1$$

so gilt $p_{\#}: \pi_n(E, E_1, \chi) \approx \pi_n(E, B_1, \psi)$ für $n \geq 1$.

Beweis: (1) Ist $[\tau] \in \pi_n(E, B_1, \psi)$, so existiert wegen Eigenschaft (1) eine Ausfüllung σ der $(0, n)$ -Tüte $(\chi_{n-1}, \dots, \chi_{n-1})$ in E mit $p(\sigma) = \tau$.

Da $p(\sigma \varepsilon^0) = (p \sigma) \varepsilon^0 \in B_1$, ist wegen Eigenschaft (2) $\sigma \varepsilon^0 \in E_1$.

(2) Ist $[\sigma] \in \pi_n(E, E_1, \chi)$, so dass $p[\sigma] = 0$, so existiert ein $(n+1)$ -Simplex $\xi \in B_{n+1}$ derart, dass $\xi \varepsilon^{n+1} = p(\sigma)$

$$\xi \varepsilon^n = \dots = \xi \varepsilon^1 = \chi_n$$

$$\xi \varepsilon^0 \in B_1$$

Wegen Eigenschaft (1) existiert dann eine Ausfüllung $\bar{\sigma}$ der $(0, n+1)$ -Tüte $(\chi_n \dots \chi_n, \xi)$ in E mit $p(\bar{\sigma}) = \xi$. Da $p(\bar{\sigma} \varepsilon^0) = (p \bar{\sigma}) \varepsilon^0 \in B_1$, ist wegen Eigenschaft (2) $\bar{\sigma} \varepsilon^0 \in E_1$, also ist $\sigma \sim \chi_n$ in (E, E_1, χ) mit der Homotopie $\bar{\sigma}$, d.h. $[\sigma] = 0$.

Satz (9.11): Für jedes Tripel $(K, L, \psi) \in \mathcal{K}'$ und jedes $n > 0$ existiert ein Randhomomorphismus

$$\partial_n: \pi_n(K, L, \psi) \longrightarrow \pi_{n-1}(L, \psi)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Die Homotopiesequenz $\xrightarrow{\partial_n} \pi_n(L, \psi) \xrightarrow{j_n} \pi_n(K, \psi) \xrightarrow{j_n} \pi_n(K, L, \psi) \xrightarrow{\partial_n} \pi_{n-1}(L, \psi) \xrightarrow{j_{n-1}}$

ist exakt. Dabei sind i_* und j_* die induzierten Homomorphismen der Inklusionen $i: (L, \psi) \subset (K, \psi)$ und $j: (K, \psi) \subset (K, L, \psi)$.

- (2) Für jede c.s.s.-Abbildung $f: (K, L, \psi) \longrightarrow (M, N, \phi)$ ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(K, L, \psi) & \xrightarrow{f_*} & \pi_n(M, N, \phi) \\ \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial_n \\ \pi_{n-1}(L, \psi) & \xrightarrow{(f/L)_*} & \pi_{n-1}(N, \phi) \end{array}$$

Beweis: (a) Ist $[\sigma] \in \pi_n(K, L, \psi)$, so induziert die Zuordnung $\partial_n[\sigma] = [\sigma \varepsilon^0]$ einen Homomorphismus von $\pi_n(K, L, \psi)$ in $\pi_{n-1}(L, \psi)$.

∂_n ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten σ , denn ist $\sigma \sim \tau$ mit einer Homotopie ξ , so ist $\sigma \varepsilon^0 \sim \tau \varepsilon^0$ mit der Homotopie $\xi \varepsilon^0$.

Sind $[\sigma], [\tau] \in \pi_n(K, L, \psi)$ und ist $[\xi_2 \varepsilon^n] = [\sigma] - [\tau]$, so ist $[\xi_2 \varepsilon^0 \varepsilon^{n-1}] = [\sigma \varepsilon^0] - [\tau \varepsilon^0]$.

- (b) Die Exaktheit der Homotopiesequenz:

1. $j_* i_* [\sigma] = 0$, da für jedes $\sigma \in \pi_n(L, \psi)$ eine beliebige Ausfüllung der $(0, n+1)$ -Möbe $(\psi_n \dots \psi_n, \sigma)$ in L in (K, L, ψ) eine Homotopie zwischen σ und ψ_n herstellt.
2. Ist $j_* [\sigma] = 0$, so existiert ein $(n+1)$ -Simplex $\xi \in K_{n+1}$, so dass $\xi \varepsilon^{n+1} = \sigma$, $\xi \varepsilon^1 = \psi_n$

für $0 \leq i \leq n+1$ und $\xi \in L_n$.

Da $(\xi \varepsilon^0, \dots, \xi \varepsilon^n)$ eine $(n+1, n+1)$ -Tüte in L ist, existiert eine Ausfüllung $\bar{\xi} \in L_{n+1}$ und es ist $\bar{\xi} \varepsilon^{n+1} \sim \sigma$, d.h. $i_{\#}[\bar{\xi} \varepsilon^{n+1}] = [\sigma]$.

$$3. \partial_n j_{\#}[\sigma] = [j \sigma \varepsilon^0] = [\psi_{n-1}] = 0.$$

4. Ist $\partial_n[\sigma] = 0$, so existiert ein n -Simplex $\xi \in L_n$ mit $\xi \varepsilon^n = \sigma \varepsilon^0$

$$\xi \varepsilon^i = \psi_{n-1} \quad \text{für } 0 \leq i \leq n.$$

Bildet man nun die $(n, n+1)$ -Tüte

$(\xi, \psi_{n-1}, \dots, \psi_{n-1}, \sigma)$ in K mit Ausfüllung χ ,

so ist χ in (K, L, ψ) eine Homotopie zwischen σ und der n -Sphäre $\chi \varepsilon^n \in \Gamma_n(K, \psi)$, d.h.

$$j_{\#}[\chi \varepsilon^n] = [\sigma].$$

5. $i_{\#} \partial_n[\sigma] = [i \sigma \varepsilon^0] = 0$, da σ in (K, ψ) eine Homotopie zwischen $\sigma \varepsilon^0$ und ψ_{n-1} herstellt.

6. Ist $i_{\#}[\sigma] = 0$, so existiert ein n -Simplex

$$\xi \in K_n \text{ mit } \xi \varepsilon^i = \psi_{n-1} \quad \text{für } i > 0$$

$$\xi \varepsilon^0 = \sigma$$

$$\text{also } \partial_n[\xi] = [\sigma].$$

(c) Die Kommutativität des Diagramms folgt nach Definition von ∂_n und $f_{\#}$ aus der Beziehung $f(\sigma \varepsilon^0) = (f \sigma) \varepsilon^0$.

10. Relative Homotopiegruppen mit Koeffizienten

Definition (10.1): Sei (K, L, ψ) ein Tripel aus $\mathcal{D}'$ und G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe mit den Invarianten $(r; p_1 \dots p_s)$, so setzt man für $n \geq 4$

$$\pi_n(K, L, \psi; G) = \pi_{n-3}(K(\overline{r}); p_1, \dots, p_s), \\ , L(\overline{r}); p_1, \dots, p_s, \overline{\psi})$$

Da genau wie im absoluten Fall

(1) jede c.s.s.-Abbildung $f: (K, L, \psi) \longrightarrow (M, N, \phi)$

eine c.s.s.-Abbildung

$$\overline{f}: (K(\overline{r}); p_1 \dots p_s), L(\overline{r}); p_1 \dots p_s, \overline{\psi}) \longrightarrow \\ \longrightarrow (M(\overline{r}); p_1 \dots p_s), N(\overline{r}); p_1 \dots p_s, \overline{\phi})$$

induziert,

(2) aus $f \simeq g$ rel. ψ folgt $\overline{f} \simeq \overline{g}$ rel. $\overline{\psi}$,

(3) für jede c.s.s.-Abbildung $f: (K, L, \psi) \longrightarrow (M, N, \phi)$

$$\text{mit } f^{-1}(N) = I, \text{ auch } f^{-1}(N(\overline{r}); p_1 \dots p_s) = \\ = L(\overline{r}); p_1 \dots p_s \text{ gilt,}$$

übertragen sich alle Sätze aus Abschnitt (9) bis auf Dimensionsverschiebung wörtlich auf die relativen Homotopiegruppen mit Koeffizienten.

Es gilt also:

Satz (10.2): $\pi_n(K, L, \psi; G)$ ist abelsch für $n > 5$.

Satz (10.3): Ist $\mathcal{H} = \{H, h\}$ die Kategorie der Gruppen H und Homomorphismen h , so ist für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe G $\pi_n(*, *, *, G)$ ein Funktor von $\mathcal{H}'$ in $\mathcal{H}$.

Satz (10.4): Sind $f, g: (K, L, \psi) \longrightarrow (M, N, \phi)$ zwei homotope c.s.s.-Abbildungen, so gilt für die induzierten Homomorphismen $f_*, g_*: \pi_n(K, L, \psi; G) \longrightarrow \pi_n(M, N, \phi; G)$ $f_* = g_*$.

Satz (10.5): Ist $p: (E, E_1, \chi) \longrightarrow (B, B_1, \psi)$ eine c.s.s.-Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) $p: (E, \chi) \longrightarrow (B, \psi)$ ist eine Faserabbildung,
- (2) $p^{-1}(B_1) = E_1$,

so gilt für $n \geq 4$

$$p_*: \pi_n(E, E_1, \chi; G) \approx \pi_n(B, B_1, \psi; G).$$

Satz (10.6): Für jedes Tripel $(K, L, \psi) \in \mathcal{H}'$ und jedes $n \geq 3$ existiert ein Randhomomorphismus

$$\partial_n: \pi_n(K, L, \psi; G) \longrightarrow \pi_{n-1}(L, \psi; G)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) Die Homotopiesequenz $\xrightarrow{\partial_n} \pi_n(L, \psi; G) \xrightarrow{i_n} \xrightarrow{j_n} \pi_n(K, \psi; G) \xrightarrow{j_n} \pi_n(K, L, \psi; G) \xrightarrow{\partial_n} \pi_{n-1}(L, \psi; G) \xrightarrow{i_{n-1}}$ ist exakt.

- (2) Für jede c.s.s.-Abbildung $f: (K, L, \psi) \longrightarrow (M, N, \phi)$ gilt $\partial_n \cdot f_* = (f/L)_* \partial_n$.

IV. Die Katutaschen Homotopiegruppen und der natürliche Isomorphismus λ_*

Y. Katuta hat in [4] Homotopiegruppen mit Koeffizienten für topologische Räume mit Basispunkt in folgender Weise eingeführt:

Er konstruiert entsprechend Definition (6.2) für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe G einen speziellen Ko-Moore-Raum $P(G, n)$ und betrachtet dann die Abbildungsklassen $\pi((P(G, n), \phi); (X, x))$ der stetigen Abbildungen f von $(P(G, n), \phi)$ in das Paar (X, x) . Ausserdem zeigt er, dass zwischen diesen Abbildungsklassen und den Elementen der Homotopiegruppe $\pi_{n-2}(X^{P(G, 2)}, \hat{x})$ des Funktionalraumes $X^{P(G, 2)}$ eine eindeutige Beziehung besteht, durch welche in $\pi((P(G, n), \phi); (X, x))$ eine Gruppenstruktur induziert wird.

Die Menge $\pi((P(G, n), \phi); (X, x))$ versehen mit der so induzierten Gruppenstruktur ist dann für $n \geq 3$ die Katutasche Homotopiegruppe $\pi_n(X, x; G)$.

Wir wollen nun zeigen, dass sich die Katutasche Definition auch auf semisimpliziale Komplexe übertragen lässt und dabei zu der in Kapitel I gegebenen Definition von Homotopiegruppen mit Koeffizienten in natürlicher Weise isomorph ist.

Dazu konstruieren wir unter Verwendung des in (6) definierten Ko-Moore-Komplexes $P(G, 2)$ zu jedem Paar (K, ψ) den Funktionalkomplex $K^{P(G, 2)}$ und zeigen, dass die

Homotopiegruppen $\hat{\pi}_n(K, \psi; G) = \pi_{n-2}(K^{P(G, 2)}, \hat{\psi})$ und $\pi_n(K, \psi; G) = \pi_{n-3}(K([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\psi})$ in natürlicher Weise isomorph sind.

Aufgrund von Satz (6.4) ist damit sowohl die Katuta-sche Definition auf c.s.s.-Komplexe übertragen, als auch ihre Isomorphie zu der in Kapitel I gegebenen Definition (2.8) in natürlicher Weise hergestellt.

11. Grundlagen [3]

Sind (K, ψ) und (L, ϕ) zwei c.s.s.-Komplexe mit Basispunkt, so ist der Funktionalkomplex $(K^L, \hat{\psi})$ folgendermassen definiert:

(1) die n -Simplexe von K^L sind die c.s.s.-Abbildungen

$$\begin{aligned} \psi: L \times \Delta[n] &\longrightarrow K \text{ mit } \psi(\phi_n, \varepsilon_n) = \psi_n \text{ für} \\ \varepsilon_n: [n] &\longrightarrow [n] \text{ Identität,} \end{aligned}$$

(2) Seitenbildung und Entartung sind gegeben durch die zusammengesetzten Abbildungen

$$\psi \varepsilon^i: L \times \Delta[n-1] \xrightarrow{1_L \times \Delta \varepsilon^i} L \times \Delta[n] \xrightarrow{\psi} K$$

$$\psi \gamma^i: L \times \Delta[n+1] \xrightarrow{1_L \times \Delta \gamma^i} L \times \Delta[n] \xrightarrow{\psi} K$$

$$\text{mit } \Delta \varepsilon^i(\alpha) = \varepsilon_n^i \circ \alpha \quad \text{für } \alpha \in \Delta[n-1]$$

$$\Delta \gamma^i(\alpha) = \gamma_n^i \circ \alpha \quad \text{für } \alpha \in \Delta[n+1]$$

(3) der Basispunkt $\hat{\psi}: L \times \Delta[0] \longrightarrow K$ ist diejenige c.s.s.-Abbildung, die für jedes $n \geq 0$ alle n -Simplexe aus $L \times \Delta[0]$ auf das vollständig entartete Simplex ψ_n abbildet.

Für die Funktionalkomplexe gilt bezüglich der Kan-Bedingung der folgende Satz:

Satz: Ist (K, ψ) ein Kan-Komplex mit Basispunkt und (L, ϕ) ein beliebiger c.s.s.-Komplex mit Basispunkt, so ist der Funktionalkomplex $(K^L, \hat{\psi})$ auch ein Kan-Komplex.

Einen Beweis dieses Satzes findet man in [1].

12. Die Homotopiegruppen $\hat{\pi}_n(K, \psi; G)$ und λ_*

Definition (12.1): (K, ψ) sei ein Kan-Komplex mit Basispunkt, G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe und $P(G, 2)$ der in (6) definierte Ko-Moore-Komplex. Dann ist für $n \geq 3$

$$\hat{\pi}_n(K, \psi; G) = \pi_{n-2}(K^{P(G, 2)}, \hat{\psi})$$

Im folgenden sollen nun die Homotopieklassen von $\hat{\pi}_n(K, \psi; G)$ genauer untersucht werden. Dazu zunächst eine kurze Betrachtung des Komplexes $P(G, 2) \times \Delta[n-2]$.

Definition (12.2): Ein r -Simplex $(\sigma, \alpha) \in P(G, 2) \times \Delta[n-2]$ heisst ausgezeichnet, wenn $\alpha: [r] \longrightarrow [n-2]$ epimorph ist.

Lemma (12.3): Jedes ausgezeichnete r -Simplex

$(\sigma, \alpha) \in P(G, 2) \times \Delta[n-2]$ entsteht durch Anwendung von Seiten- und Entartungsoperatoren aus einem Simplex $([i, j_i, k, l, n], \varepsilon_{n-2} \gamma^k \gamma^l)$ mit $i=1, \dots, r+s$

$j_i=1, \dots, p_i-1$ und $p_i = 2$ für $i \leq r$
 $0 \leq k < l < n$

wobei mit $\varepsilon_{n-2}: [n-2] \longrightarrow [n-2]$ die identische Abbildung bezeichnet wird.

Beweis: Wie unmittelbar aus der Definition folgt, gibt es keine ausgezeichneten r -Simplexe für $r < n-2$.

Sei also $r \geq n-2$.

Dann haben alle ausgezeichneten r -Simplexe die Gestalt

$$([i, j_1, k, l, n], \varepsilon_{n-2} \gamma^{\alpha_0} \dots \gamma^{\alpha_{r-n+1}}) =$$

$$= \begin{cases} ([i, j_1, 0, 1, 2] \gamma^0 \dots \hat{\gamma}^k \dots \hat{\gamma}^1 \dots \gamma^{r-1}, \varepsilon_{n-2} \gamma^{\alpha_0} \dots \gamma^{\alpha_{r-n+1}}) & \text{für } k < 1 \\ ([i, j_1, 0, 0, 1] \gamma^0 \dots \hat{\gamma}^k \dots \gamma^{r-1}, \varepsilon_{n-2} \gamma^{\alpha_0} \dots \gamma^{\alpha_{r-n+1}}) & \text{für } k = 1 \end{cases}$$

$$\text{mit } 0 \leq \alpha_0 < \dots < \alpha_{r-n+1} \leq r-1.$$

Wie man sich leicht überzeugt, sind alle diese Simplexe entartet ausser

$$(1) ([i, j_1, k, l, n-2], \varepsilon_{n-2}) \quad k \leq 1$$

$$(2) ([i, j_1, k, l, n-1], \varepsilon_{n-2} \gamma^m) \quad k \leq 1 \quad m = k, 1$$

$$(3) ([i, j_1, k, l, n], \varepsilon_{n-2} \gamma^k \gamma^l) \quad k < 1$$

Für (1) und (2) gilt nun

$$(1) ([i, j_1, k, l, n-2], \varepsilon_{n-2}) =$$

$$= \begin{cases} ([i, j_1, k, l, n-1], \varepsilon_{n-2} \gamma^1) \varepsilon^{1+1} & \text{für } j_1 < p_i \\ ([i, p_i-1, k, k+1, n-1], \varepsilon_{n-2} \gamma^k) \varepsilon^{k+1} & \text{für } j_1 = p_i \end{cases}$$

$$(2) ([i, j_1, k, l, n-1], \varepsilon_{n-2} \gamma^m) =$$

$$= \begin{cases} ([i, j_1, k+1, l+1, n], \varepsilon_{n-2} \gamma^{k+1} \gamma^{l+1}) \varepsilon^{k+1} & m=1 > k \\ ([i, j_1, k, l+1, n], \varepsilon_{n-2} \gamma^k \gamma^{l+1}) \varepsilon^{1+1} & m=k < l \end{cases}$$

$$([i, j_i, k, k, n-1], \varepsilon_{n-2} \gamma^k) =$$

$$= ([i, j_i, 0, k+1, n], \varepsilon_{n-2} \gamma^0 \gamma^{k+1}) \varepsilon^0$$

und damit ist das Lemma bewiesen.

Ist nun φ ein Repräsentant einer Klasse $\alpha \in \hat{\pi}_n(K, \varphi; G)$, so ist $\varphi: P(G, 2) \times \Delta [n-2] \longrightarrow K$ eine c.s.s.-Abbildung mit $\varphi \varepsilon^i = \hat{\psi}_{n-3}$ für $i = 0, \dots, n-2$.

Das besagt nach Definition der Seitenbildung aber gerade, dass unter φ alle nicht ausgezeichneten r -Simplexe aus $P(G, 2) \times \Delta [n-2]$ auf $\varphi_r \in K$ abgebildet werden. Wegen Lemma (12.3) ist die Abbildung φ also vollständig bestimmt durch die Bilder

$$S(i, j_i, k, l, n) = \varphi([i, j_i, k, l, n], \varepsilon_{n-2} \gamma^k \gamma^l)$$

für $i=1, \dots, r+s$ $j_i=1, \dots, p_i-1$ $0 \leq k < l < n$.

Lemma (12.4): In jeder Klasse $\alpha \in \hat{\pi}_n(K, \varphi; G)$ existiert eine Abbildung $\bar{\varphi}$, so dass

$$\begin{aligned} \bar{S}(i, j_i, k, l, n) &= \psi_n & \text{für } i=1, \dots, r+s \\ & & j_i=1, \dots, p_i-1 \\ & & 0 \leq k < l < n-1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \bar{S}(i, j_i, k, n-1, n) \varepsilon^l \varepsilon^m &= \psi_{n-2} \\ & \text{für } i=1, \dots, r+s \\ & j_i=1, \dots, p_i-1 \\ & k=0, \dots, n-2 \\ & 0 \leq m < l \leq n \end{aligned}$$

Beweis: (I) Ist φ ein beliebiger Repräsentant einer Klasse $\alpha \in \hat{\Pi}_n(K, \psi; G)$, so ist zu zeigen:

Es existiert eine c.s.s.-Abbildung

$\xi : P(G, 2) \times \Delta [n-1] \longrightarrow K$, so dass

$$\xi \varepsilon^{n-1} = \varphi$$

$$\xi \varepsilon^{n-2} = \bar{\varphi}$$

$$\xi \varepsilon^i = \hat{\psi}_{n-2} \quad 0 \leq i < n-2$$

Da für ein nicht ausgezeichnetes r -Simplex auch alle Seiten nicht ausgezeichnet sind, kann die Homotopie ξ stets so bestimmt werden, dass sie allen nicht ausgezeichneten r -Simplexen aus $P(G, 2) \times \Delta [n-1]$ das vollständig entartete Simplex ψ_r zuordnet.

Wegen Lemma (12.3) ist also auch ξ vollständig bestimmt durch die Bilder

$$T(i, j_i, k, l, n+1) = \xi([i, j_i, k, l, n+1], \varepsilon_{n-1} \gamma^{k, l})$$

für $i=1, \dots, r+s$

$$j_i=1, \dots, p_i-1$$

$$0 \leq k < l < n+1$$

(II) Konstruktion der Simplexe $T(i, j_i, k, l, n+1)$:

Man führt zunächst noch die folgenden Bezeichnungen ein:

$$T(i, j_i, a, b, n) = \begin{cases} \xi([i, j_i, a, b, n], \varepsilon_{n-1} \gamma^a) & a \leq b \\ \xi([i, j_i, b, a, n], \varepsilon_{n-1} \gamma^a) & a > b \end{cases}$$

$$T(i, j_i, k, l, n-1) = \mathcal{S}([i, j_i, k, l, n-1], \varepsilon_{n-1})$$

$$S(i, j_i, a, b, n-1) = \begin{cases} \varphi([i, j_i, a, b, n-1], \varepsilon_{n-2} \gamma^a) & a \leq b \\ \varphi([i, j_i, b, a, n-1], \varepsilon_{n-2} \gamma^a) & a > b \end{cases}$$

Betrachtet man nun die Seitensimplexe von $T(i, j_i, k, l, n+1)$, so ergeben sich die folgenden Forderungen:

(nicht aufgeführte Seiten sind stets gleich $\mathcal{U}_n$ zu setzen)

$$(1) \quad 0 \leq k < l < n-2$$

Seiten	$T(i, j_i, k, l, n+1)$
$n+1$	$S(i, j_i, k, l, n)$
n	$\overline{S}(i, j_i, k, l, n) = \mathcal{U}_n$
$l+1$	$T(i, j_i, k, l, n)$
l	$\begin{cases} T(i, j_i, k, l-1, n) & l > k+1 \\ T(i, j_i+1, l-1, l-1, n) & l = k+1 \\ T(i, j_i, l-1, k, n) & k+1 < l \end{cases}$
$k+1$	
k	$\begin{cases} T(i, j_i, l-1, k-1, n) & k > 0 \\ T(i, j_i, l-1, l-1, n) & k = 0 \end{cases}$

$$(2) \quad 0 \leq k < l = n-1$$

Seiten	$T(i, j_i, k, n-1, n+1)$
$n+1$	$S(i, j_i, k, n-1, n)$
n	$T(i, j_i, k, n-1, n)$
$n-1$	$\begin{cases} T(i, j_i, k, n-2, n) & n-1 > k+1 \\ T(i, j_i+1, n-2, n-2, n) & n-1 = k+1 \end{cases}$
$k+1$	$T(i, j_i, n-2, k, n) \quad k+1 < n-1$

Seiten $T(i, j_i, k, n-1, n+1)$

$$\begin{array}{l} k \\ \left\{ \begin{array}{l} T(i, j_i, n-2, k-1, n) \\ T(i, j_i, n-2, n-2, n) \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} k > 0 \\ k = 0 \end{array}$$

(3) $0 \leq k < n-1 \quad l = n$

Seiten $T(i, j_i, k, n, n+1)$

$$\begin{array}{l} n+1 \\ n \\ n-1 \\ k+1 \\ k \end{array} \quad \begin{array}{l} T(i, 1, k, k, n) \\ T(i, j_i, k, n-1, n) \\ \left\{ \begin{array}{l} \bar{S}(i, j_i, k, n-1, n) \\ T(i, j_i, n-1, n-2, n) \end{array} \right. \\ T(i, j_i, n-1, k, n) \\ \left\{ \begin{array}{l} T(i, j_i, n-1, k-1, n) \\ T(i, j_i, n-1, n-1, n) \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ n-1 > k+1 \\ n-1 = k+1 \\ k+1 < n-1 \\ k > 0 \\ k = 0 \end{array}$$

(4) $k = n-1 \quad l = n$

Seiten $T(i, j_i, n-1, n, n+1)$

$$\begin{array}{l} n+1 \\ n \\ n-1 \\ n-2 \end{array} \quad \begin{array}{l} T(i, 1, n-1, n-1, n) \\ T(i, j_i+1, n-1, n-1, n) \\ T(i, j_i, n-1, n-2, n) \\ \bar{S}(i, j_i, n-2, n-1, n) \end{array}$$

Angenommen die Simplexe $T(i, j_i, k, n)$ für $i=1, \dots, r+s$
 $j_i=1, \dots, p_i-1$
 $0 \leq k \leq n-1$

und $T(i, j_i, l-1, k, n)$ für $i=1, \dots, r+s$
 $j_i=1, \dots, p_i-1$
 $0 \leq k < l-1 < n$

wären schon konstruiert, so dass ihre Seiten alle an §
 gestellten Forderungen erfüllen, so lassen sich die

Simplexe $T(i, j_i, k, l, n+1)$ durch vollständige Induktion nach den Paaren (k, l) konstruieren und zwar in folgender Weise:

- (a) Es sind alle Seiten von $T(i, j_i, 0, 1, n+1)$ ausser der zweiten schon bestimmt und sie bilden eine $(2, n+1)$ -Tüte in K . $T(i, j_i, 0, 1, n+1)$ ist dann eine beliebige Ausfüllung dieser Tüte.
- (b) Hat man alle Simplexe $T(i, j_i, k, l, n+1)$ für $k < l < L$ schon konstruiert, so sind die Seiten von $T(i, j_i, 0, L, n+1)$ bis auf (1) die $(L+1)$ -te wenn $L \leq n-1$ (2) die $(n-1)$ -te wenn $L = n$ bereits bestimmt und bilden eine $(L+1, n+1)$ - bzw. $(n-1, n+1)$ -Tüte in K , deren Ausfüllung man gleich $T(i, j_i, 0, L, n+1)$ setzt.
- (c) Sind nun weiterhin alle Simplexe $T(i, j_i, k, L, n+1)$ mit $k < K \leq L-1$ schon konstruiert, so sind von $T(i, j_i, K, L, n+1)$ alle Seiten bestimmt ausser (1) der $(L+1)$ -ten für $L \leq n-1$ (2) der $(n-1)$ -ten für $K < n-1$, $L = n$ (3) der $(n-2)$ -ten für $K = n-1$, $L = n$. Sie bilden eine Tüte in K , als deren Ausfüllung das Simplex $T(i, j_i, K, L, n+1)$ gewonnen werden kann.

Es bleibt nun die Konstruktion der Simplexe $T(i, j_i, k, k, n)$ und $T(i, j_i, l-1, k, n)$.

Untersucht man wie oben wieder die Forderungen an die Seitensimplexe, so ergibt sich:

(Nicht aufgeführte Seiten sind immer gleich ψ_{n-1} zu setzen)

$$(1) 0 \leq k < n-2$$

Seiten $T(i, j_i, k, k, n)$

$$\begin{array}{ll} n & S(i, j_i, k, k, n-1) \\ n-1 & \overline{S}(i, j_i, k, k, n-1) = \psi_{n-1} \\ k+1 & T(i, j_i, k, k, n-1) \\ k & \begin{cases} T(i, j_i, k-1, k-1, n-1) & k > 0 \\ \psi_{n-1} & k = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$(2) k = n-2$$

Seiten $T(i, j_i, n-2, n-2, n)$

$$\begin{array}{ll} n & S(i, j_i, n-2, n-2, n-1) \\ n-1 & T(i, j_i, n-2, n-2, n-1) \\ n-2 & T(i, j_i, n-3, n-3, n-1) \end{array}$$

$$(3) k = n-1$$

Seiten $T(i, j_i, n-1, n-1, n)$

$$\begin{array}{ll} n & \psi_{n-1} \\ n-1 & T(i, j_i, n-2, n-2, n-1) \\ n-2 & \overline{S}(i, j_i, n-2, n-2, n-1) \end{array}$$

$$(4) 0 \leq k < l-1 < n-2$$

Seiten $T(i, j_i, l-1, k, n)$

$$\begin{array}{ll} n & S(i, j_i, l-1, k, n-1) \\ n-1 & \overline{S}(i, j_i, l-1, k, n-1) = \psi_{n-1} \\ l & T(i, j_i, k, l-1, n-1) \\ l-1 & \begin{cases} T(i, j_i, k, l-2, n-1) & k < l-2 \\ T(i, j_i+1, l-2, l-2, n-1) & k = l-2 \end{cases} \end{array}$$

$$(5) \quad 0 \leq k < l-1 = n-2$$

<u>Seiten</u>	<u>$T(i, j_1, n-2, k, n)$</u>
n	$S(i, j_1, n-2, k, n-1)$
n-1	$T(i, j_1, k, n-2, n-1)$
n-2	$\begin{cases} T(i, j_1, k, n-3, n-1) & k < n-3 \\ T(i, j_1+1, n-3, n-3, n-1) & k = n-3 \end{cases}$

$$(6) \quad 0 \leq k < l-1 = n-1$$

<u>Seiten</u>	<u>$T(i, j_1, n-1, k, n)$</u>
n	$T(i, 1, k, k, n-1)$
n-1	$T(i, j_1, k, n-2, n-1)$
n-2	$\begin{cases} \bar{S}(i, j_1, n-2, k, n-1) & k < n-2 \\ T(i, j_1+1, n-2, n-2, n-1) & k = n-2 \end{cases}$

Man überlegt sich nun genau wie im vorigen Fall, dass bei Konstruktion der Simplexe $T(i, j_1, k, k, n)$ durch vollständige Induktion nach k und danach der Simplexe $T(i, j_1, l-1, k, n)$ durch vollständige Induktion nach den Paaren $(k, l-1)$ bei jedem Induktionsschritt genau eine Seite des gesuchten Simplexes unbestimmt ist und die restlichen Seiten eine Tüte bilden, als deren Ausfüllung das Simplex gewonnen werden kann.

Eine Verschärfung der oben bewiesenen Behauptung erhält man durch das folgende Lemma.

Lemma (12.5): In jeder Klasse $\alpha \in \hat{\Pi}_n(K, \psi; G)$ existiert eine Abbildung $\hat{\psi}$, so dass

$$\hat{S}(i, j_i, k, l, n) = \psi_n \quad \text{für } i = 1, \dots, r+s$$

$$j_i = 1, \dots, p_i - 1$$

$$0 \leq k < l < n-1$$

$$\hat{S}(i, j_i, k, n-1, n) = \hat{S}(i, j_i, n-2, n-2, n-1) \gamma^k$$

$$\text{für } i = 1, \dots, r+s$$

$$j_i = 1, \dots, p_i - 1$$

$$k = 0, \dots, n-3$$

Beweis: Wegen Lemma (12.4) ist zu zeigen:

Es existiert eine Homotopie

$$\varphi: P(G, 2) \times \Delta[n-1] \longrightarrow K, \text{ so dass } \varphi \varepsilon^{n-1} = \bar{\varphi}$$

$$\varphi \varepsilon^{n-2} = \hat{\varphi}$$

$$0 \leq i < n-2 \quad \varphi \varepsilon^i = \hat{\psi}_{n-2}$$

Führt man wieder dieselben Bezeichnungen ein wie im Beweis von Lemma (12.4), so lassen sich auf Grund der Eigenschaften von $\bar{\varphi}$ die folgenden Festsetzungen machen:

$$T(i, j_i, k, l, n+1) = \psi_{n+1} \quad \text{für } i = 1, \dots, r+s$$

$$j_i = 1, \dots, p_i - 1$$

$$0 \leq k < l < n-1$$

$$T(i, j_i, k, n-1, n+1) = \bar{S}(i, j_i, k, n-1, n) \gamma^n$$

$$\text{für } i = 1, \dots, r+s$$

$$j_i = 1, \dots, p_i - 1$$

$$k = 0, \dots, n-2$$

Für die restlichen Simplexe ergeben sich dann die folgenden Seitenforderungen:

$$(1) \quad 0 \leq k < n-2$$

$$\text{Seiten} \quad \underline{T(i, j_i, k, n, n+1)}$$

$$n+1 \quad \psi_n$$

$$n \quad \bar{S}(i, j_i, k, n-1, n)$$

Seiten	$T(i, j_i, k, n, n+1)$
$n-1$	$\hat{S}(i, j_i, k, n-1, n) = \bar{S}(i, j_i, n-2, n-2, n-1) \gamma^k$
$k+1$	$T(i, j_i, n-1, k, n)$
k	$\begin{cases} T(i, j_i, n-1, k-1, n) & k > 0 \\ \bar{S}(i, j_i, n-2, n-2, n-1) \gamma^{n-2} & k = 0 \end{cases}$

(2) $k = n-2$

Seiten	$T(i, j_i, n-2, n, n+1)$
$n+1$	$\bar{S}(i, 1, n-2, n-2, n-1) \gamma^{n-1}$
n	$\bar{S}(i, j_i, n-2, n-1, n)$
$n-1$	$T(i, j_i, n-1, n-2, n)$
$n-2$	$T(i, j_i, n-1, n-3, n)$

(3) $k = n-1$

Seiten	$T(i, j_i, n-1, n, n+1)$
$n+1$	$\bar{S}(i, 1, n-2, n-2, n-1) \gamma^{n-2}$
n	$\bar{S}(i, j_i+1, n-2, n-2, n-1) \gamma^{n-2}$
$n-1$	$T(i, j_i, n-1, n-2, n)$
$n-2$	$\hat{S}(i, j_i, n-2, n-1, n)$

Die Konstruktion erfolgt wieder durch vollständige Induktion nach k . Beim k -ten Induktionsschritt ist genau die (1) $(k+1)$ -te Seite für $k < n-1$ (2) $(n-2)$ -te Seite für $k = n-1$ unbestimmt.

Folgerung: Da für die Abbildung $\hat{\varphi}$ gilt $\hat{S}(i, j_i, n-2, n-1, n) \varepsilon^{n-2} = \hat{S}(i, j_i, n-2, n-2, n-1)$, lässt sich die Behauptung von Lemma (12.5) auch folgendermassen formulieren:

Jede Klasse $\alpha \in \hat{\Pi}_n(K, \Psi; G)$ lässt sich repräsentieren durch eine Folge $(\hat{S}(1, 1, n-2, n-1, n) \dots \hat{S}(r, 1, n-2, n-1, n), (\hat{S}(r+1, 1, n-2, n-1, n) \dots \hat{S}(r+1, p_1-1, n-2, n-1, n)) \dots \dots (\hat{S}(r+s, 1, n-2, n-1, n) \dots \hat{S}(r+s, p_s-1, n-2, n-1, n)))$ mit $\hat{S}(i, j_i, n-2, n-1, n) = \hat{\Psi}([i, j_i, n-2, n-1, n], \varepsilon_{n-2} \gamma^{n-2} \gamma^{n-1})$

Im folgenden sollen auch für Homotopien und Produktbildungen entsprechende Darstellungen angegeben werden.

Lemma (12.6): Sind $\hat{\Psi}_1$ und $\hat{\Psi}_2$ zwei Repräsentanten einer Klasse $\alpha \in \hat{\Pi}_n(K, \Psi; G)$ entsprechend Lemma (12.5), so existiert eine Homotopie $\hat{S}$ zwischen $\hat{\Psi}_1$ und $\hat{\Psi}_2$ mit

$$\hat{T}(i, j_i, k, l, n+1) = \Psi_{n+1} \quad \text{für } i = 1, \dots, r+s$$

$$j_i = 1, \dots, p_i-1$$

$$0 \leq k < l < n-1$$

$$\hat{T}(i, j_i, l, n-1, n+1) = \hat{S}_2(i, j_i, l, n-1, n) \gamma^n$$

$$\hat{T}(i, j_i, k, n, n+1) = \hat{T}(i, j_i, n-1, n-1, n) \gamma^k$$

$$\text{für } i = 1, \dots, r+s$$

$$j_i = 1, \dots, p_i-1$$

$$k = 0, \dots, n-3$$

$$l = 0, \dots, n-2$$

$$\text{mit } \hat{T}(i, j_i, k, l, n+1) = \hat{S}([i, j_i, k, l, n+1], \varepsilon_{n-2} \gamma^k \gamma^l)$$

Beweis: Aus der im Beweis von Lemma (12.4) angegebenen Seitenbildung folgt, dass Lemma (12.6) bewiesen ist, wenn die Existenz zweier Simplexe

$\hat{T}(i, j_i, n-2, n, n+1)$ und $\hat{T}(i, j_i, n-1, n, n+1)$ mit

Seiten	$\hat{T}(i, j_i, n-1, n, n+1)$	$\hat{T}(i, j_i, n-2, n, n+1)$
n+1	$\hat{T}(i, 1, n-1, n-1, n)$	$\hat{S}_2(i, 1, n-2, n-2, n-1) \gamma^{n-1}$
n	$\hat{T}(i, j_i+1, n-1, n-1, n)$	$\hat{S}_2(i, j_i, n-2, n-1, n)$
n-1	$B_{ij_i} \varepsilon^{n+1}$	$B_{ij_i} \varepsilon^{n+1}$
n-2	$\hat{S}_1(i, j_i, n-2, n-1, n)$	$\hat{T}(i, j_i, n-1, n-1, n)$
i	ψ_n	ψ_n

in n-2

für geeignete $\hat{T}(i, j_i, n-1, n-1, n)$ und B_{ij_i} gezeigt ist.

Sei γ eine beliebige Homotopie zwischen $\hat{\gamma}_1$ und $\hat{\gamma}_2$ und $T(i, j_i, k, l, n+1)$ die zugehörigen Bildsimplexe. Für die Seiten führt man wieder die gleichen Bezeichnungen ein wie im Beweis von Lemma (12.4).

Dann werden die folgenden induktiven Tütenbildungen in K betrachtet:

(1.1) die $(1, n+1)$ -Tüten $(\psi_n \dots \psi_n, T(i, j_i, 0, 0, n), \psi_n, \psi_n)$ mit Ausfüllung $\bar{\sigma}_{ij_i}^0$

(1.2) die $(l+1, n+1)$ -Tüten für $l < n-2$ $(\psi_n \dots \psi_n, \underbrace{\bar{\sigma}_{ij_i}^{l-1}}_{\varepsilon} \varepsilon^l, \psi_n \dots \psi_n, T(i, j_i, l, l, n), \psi_n, \psi_n)$ mit Ausfüllung $\bar{\sigma}_{ij_i}^l$

(1.3) die $(n, n+1)$ -Tüten $(\psi_n \dots \psi_n, \bar{\sigma}_{ij_i}^{n-3} \varepsilon^{n-2}, T(i, j_i, n-2, n-2, n), \hat{S}_2(i, j_i, n-2, n-2, n-1) \gamma^{n-1})$ mit Ausfüllung $\bar{\sigma}_{ij_i}^{n-2}$

(2.01) die $(2, n+1)$ -Tüten $(\psi_n, \underbrace{\vartheta_{ij_i+1}^0 \varepsilon^1}_{\varepsilon}, \psi_n \dots \psi_n,$

$, T(i, j_i, 1, 0, n) \psi_n, \psi_n)$ mit Ausfüllung $\tau_{ij_i}^{1,0}$

(2.2.1) die $(1+1, n+1)$ -Tüten $(\psi_n \dots \psi_n, \underbrace{\tau_{ij_i}^{1-1, k} \varepsilon^1}_{\varepsilon}, \psi_n \dots$

$\dots \psi_n, T(i, j_i, 1, k, n), \psi_n, \psi_n)$ mit Ausfüllung

$\tau_{ij_i}^{1, k}$ für $k < 1-1 < n-3$

(2.2.2) die $(1+1, n+1)$ -Tüten $(\psi_n \dots \psi_n, \underbrace{\vartheta_{ij_i+1}^{1-1} \varepsilon^1}_{\varepsilon}, \psi_n \dots$

$\dots \psi_n, T(i, j_i, 1, 1-1, n), \psi_n, \psi_n)$ mit Ausfüllung

$\tau_{ij_i}^{1, 1-1}$ für $1-1 < n-3$

(2.3.1) die $(n, n+1)$ -Tüten $(\psi_n \dots \psi_n, \tau_{ij_i}^{n-3, k} \varepsilon^{n-2},$

$, T(i, j_i, n-2, k, n), \hat{S}_2(i, j_i, n-2, n-2, n) \gamma^{n-1})$ mit Aus-

füllung $\tau_{ij_i}^{n-2, k}$ für $k < n-3$

(2.3.2) die $(n, n+1)$ -Tüten $(\psi_n \dots \psi_n, \vartheta_{ij_i+1}^{n-3} \varepsilon^{n-2},$

$, T(i, j_i, n-2, n-3, n), \hat{S}_2(i, j_i, n-2, n-2, n) \gamma^{n-1})$ mit

Ausfüllung $\tau_{ij_i}^{n-2, n-3}$

(3.1) die $(1, n+1)$ -Tüten $(T(i, j_i, n-2, n-2, n-1) \gamma^{n-2}, \psi_n \dots$

$\dots \psi_n, T(i, j_i, 0, n-1, n), T(i, j_i, n-2, n-2, n-1) \gamma^0, \psi_n)$

mit Ausfüllung $\vartheta_{ij_i}^0$

(3.2) die $(1+1, n+1)$ -Tüten $(\psi_n \dots \psi_n, \underbrace{\vartheta_{ij_i}^{1-1} \varepsilon^1}_{\varepsilon}, \psi_n \dots \psi_n,$

$, T(i, j_i, 1, n-1, n), T(i, j_i, n-2, n-2, n-1) \gamma^1, \psi_n)$ mit Aus-

füllung $\vartheta_{ij_i}^1$ für $1 < n-2$

- (3.3) die $(n, n+1)$ -Tüten $(\psi_n \dots \psi_n, \underbrace{\varepsilon_{ij_i}^{n-3}}_{\varepsilon} \varepsilon^{n-2},$
 $, T(i, j_i, n-2, n-1, n), \hat{S}_2(i, 1, n-2, n-2, n-1) \gamma^{n-1})$ mit
 Ausfüllung $\varepsilon_{ij_i}^{n-2}$
- (4.1) die $(1, n+1)$ -Tüten $(T(i, j_i, n-2, n-2, n-1) \gamma^{n-2}, \psi_n \dots$
 $\dots \psi_n, T(i, j_i, 0, n-1, n), T(i, j_i, n-2, n-2, n-1) \gamma^0, \psi_n)$
 mit Ausfüllung $\lambda_{ij_i}^0$
- (4.2) die $(k+1, n+1)$ -Tüten $(\psi_n \dots \psi_n, \underbrace{\lambda_{ij_i}^{k-1} \varepsilon^k}_{\varepsilon}, \psi_n \dots \psi_n,$
 $, T(i, j_i, k, n-1, n), T(i, j_i, n-2, n-2, n-1) \gamma^k, \psi_n)$ mit
 Ausfüllung $\lambda_{ij_i}^k$ für $k \leq n-2$
- (4.3) die $(n, n+1)$ -Tüten $(\psi_n \dots \psi_n, \lambda_{ij_i}^{n-3} \varepsilon^{n-2},$
 $, T(i, j_i, n-2, n-1, n), \hat{S}_2(i, 1, n-2, n-2, n-1) \gamma^{n-1})$ mit
 Ausfüllung $\lambda_{ij_i}^{n-2}$
- (5.1) die $(2, n+2)$ -Tüten $(\varepsilon_{ij_i}^0, \varepsilon_{ij_i+1}^0, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1},$
 $, T(i, j_i, 0, 1, n+1), \psi_{n+1}, \psi_{n+1})$ mit Ausfüllung
 $\gamma_{ij_i}^{0,1}$
- (5.2.1) die $(1+2, n+2)$ -Tüten $(\varepsilon_{ij_i}^1, \tau_{ij_i}^{1,0}, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1},$
 $, \underbrace{\gamma_{ij_i}^{0,1} \varepsilon^{1+1}}_{\varepsilon+1}, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, T(i, j_i, 0, 1+1, n+1),$
 $, \psi_{n+1}, \psi_{n+1})$
 mit Ausfüllung $\gamma_{ij_i}^{0,1+1}$ für $1 \leq n-2$

(5.2.2) die $(1+2, n+2)$ -Tüten $(\mu_{n+1} \dots \mu_{n+1}, \underbrace{\tau_{ij_i}^{1, k-1}}_{k-1},$
 $\underbrace{\tau_{ij_i}^{1, k}}_{k+1}, \mu_{n+1} \dots \mu_{n+1}, \underbrace{\gamma_{ij_i}^{k, 1} \varepsilon^{1+1}}_{k+1}, \mu_{n+1} \dots \mu_{n+1},$
 $T(i, j_i, k, 1+1, n+1), \mu_{n+1}, \mu_{n+1})$ mit Ausfüllung
 $\gamma_{ij_i}^{k, 1+1}$ für $k < 1 < n-2$

(5.2.3) die $(1+2, n+2)$ -Tüten $(\mu_{n+1} \dots \mu_{n+1}, \underbrace{\tau_{ij_i}^{1, l-1}}_{l-1},$
 $\underbrace{\sigma_{ij_i}^1}_{l+1}, \mu_{n+1} \dots \mu_{n+1}, T(i, j_i, l, 1+1, n+1), \mu_{n+1},$
 $\mu_{n+1})$ mit Ausfüllung $\gamma_{ij_i}^{1, 1+1}$ für $1 < n-2$

(5.3.1) die $(n+1, n+2)$ -Tüten $(\sigma_{ij_i}^{n-2}, \tau_{ij_i}^{n-2, 0}, \mu_{n+1} \dots$
 $\dots \mu_{n+1}, \gamma_{ij_i}^{0, n-2} \varepsilon^{n-1}, T(i, j_i, 0, n-1, n+1),$
 $\hat{S}_2(i, j_i, n-2, n-2, n-1) \gamma^{n-1} \gamma^0)$ mit Ausfüllung
 $\gamma_{ij_i}^{0, n-1}$

(5.3.2) die $(n+1, n+2)$ -Tüten $(\mu_{n+1} \dots \mu_{n+1}, \underbrace{\tau_{ij_i}^{n-2, k-1}}_{k-1},$
 $\underbrace{\tau_{ij_i}^{n-2, k}}_{k+1}, \mu_{n+1} \dots \mu_{n+1}, \gamma_{ij_i}^{k, n-2} \varepsilon^{n-1},$
 $T(i, j_i, k, n-1, n+1), \hat{S}_2(i, j_i, n-2, n-2, n-1) \gamma^{n-1} \gamma^k)$
mit Ausfüllung $\gamma_{ij_i}^{k, n-1}$ für $k < n-2$

(5.3.3) die $(n+1, n+2)$ -Tüten $(\mu_{n+1} \dots \mu_{n+1}, \tau_{ij_i}^{n-2, n-3},$
 $\sigma_{ij_i+1}^{n-2}, T(i, j_i, n-2, n-1, n+1), \hat{S}_2(i, j_i, n-2, n-1, n) \gamma^n)$
mit Ausfüllung $\gamma_{ij_i}^{n-2, n-1}$

(6.1) die $(1, n+2)$ -Tüten $(\varepsilon_{ij_i}^{n-2} \varepsilon^n \varphi^{n-2}, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1},$
 $\gamma_{ij_i}^{0, n-1} \varepsilon^{n+1}, \varepsilon_{ij_i}^{n-2} \varepsilon^n \varphi^0, \lambda_{ij_i}^0, \hat{S}_2(i, j_i, n-2, n-2,$
 $, n-1) \varphi^{n-2} \varphi^0)$ mit Ausfüllung $\chi_{ij_i}^0$

(6.2) die $(k+1, n+2)$ -Tüten $(\psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, \underbrace{\chi_{ij_i}^{k-1, k}}_k, \psi_{n+1} \dots$
 $\dots \psi_{n+1}, \gamma_{ij_i}^{k, n-1} \varepsilon^{n+1}, \varepsilon_{ij_i}^{n-2} \varepsilon^n \varphi^k, \lambda_{ij_i}^k,$
 $\hat{S}_2(i, j_i, n-2, n-2, n-1) \varphi^{n-2} \varphi^k)$ mit Ausfüllung
 $\chi_{ij_i}^k$ für $k < n-2$

(6.3) die $(n, n+2)$ -Tüten $(\psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, \chi_{ij_i}^{n-3, n-2},$
 $, T(i, j_i, n-2, n-1, n+1), \lambda_{ij_i}^{n-2}, \hat{S}_2(i, j_i, n-2, n-1, n) \varphi^{n-1})$
mit Ausfüllung $\chi_{ij_i}^{n-2}$

(7.1) die $(1, n+2)$ -Tüten $(T(i, j_i, n-1, n-1, n) \varphi^{n-2}, \psi_{n+1} \dots$
 $\dots \psi_{n+1}, T(i, j_i, 0, n, n+1), T(i, j_i, n-1, n-1, n) \varphi^0,$
 $, \chi_{ij_i}^0, S_{ij_i}^0)$ mit Ausfüllung $\gamma_{ij_i}^{0, n}$

(7.2) die $(k+1, n+2)$ -Tüten $(\psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, \underbrace{\gamma_{ij_i}^{k-1, n} \varepsilon^k}_k,$
 $, \psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, T(i, j_i, k, n, n+1), T(i, j_i, n-1, n-1, n) \varphi^k,$
 $, \chi_{ij_i}^k, S_{ij_i}^k)$ mit Ausfüllung $\gamma_{ij_i}^{k, n}$ für $k < n-2$

(7.3) die $(n, n+2)$ -Tüten $(\psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, \gamma_{ij_i}^{n-3, n} \varepsilon^{n-2},$
 $, T(i, j_i, n-2, n, n+1), \lambda_{ij_i}^{n-2}, S_{ij_i}^{n-2})$ mit Ausfüllung $\gamma_{ij_i}^{n-2, n}$

(8) die $(n+1, n+1)$ -Tüten $(\psi_n \dots \psi_n, \hat{S}_1(i, j_1, n-2, n-2, n-1) \gamma^{n-1}$
 $, \gamma_{ij_1}^{n-2, n} \varepsilon^n \varepsilon^n, T(i, j_1, n-1, n-1, n))$ mit Ausfüllung

α_{ij_1} und setzt $\alpha_{ij_1} \varepsilon^{n+1} = \hat{T}(i, j_1, n-1, n-1, n)$

(9) die $(n, n+1)$ -Tüten $(\psi_n \dots \psi_n, \hat{S}_1(i, j_1, n-2, n-2, n-1) \gamma^{n-2}$
 $, T(i, j_1, n-1, n-2, n), \gamma_{ij_1}^{n-2, n} \varepsilon^n \varepsilon^{n+1})$ mit Ausfüllung

β_{ij_1}

(10) die $(n+1, n+1)$ -Tüten $(\psi_n \dots \psi_n, \hat{S}_1(i, j_1, n-2, n-2, n-1) \gamma^{n-1}$
 $, \gamma_{ij_1}^{n-2, n-1} \varepsilon^{n+1} \varepsilon^{n-1}, \beta_{ij_1} \varepsilon^n)$ mit Ausfüllung B_{ij_1}

(11) die $(n+1, n+2)$ -Tüten $(\psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, T(i, j_1, n-1, n-1, n) \gamma^{n-1}$
 $, \beta_{ij_1}, \gamma_{ij_1}^{n-2, n} \varepsilon^n, \gamma_{ij_1}^{n-2, n} \varepsilon^n \varepsilon^{n+1} \gamma^{n-1})$ mit Aus-
 füllung $K_{ij_1}^1$

$(\psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, \hat{S}_1(i, j_1, n-2, n-1, n) \gamma^{n-1}, \beta_{ij_1},$
 $, T(i, j_1, n-1, n, n+1), \alpha_{i1})$ mit Ausfüllung $K_{ij_1}^2$

(12) die $(n+2, n+2)$ -Tüten $(\psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, \alpha_{ij_1}, B_{ij_1},$
 $, \gamma_{ij_1}^{n-2, n-1} \varepsilon^{n+1}, K_{ij_1}^1 \varepsilon^{n+1})$ mit Ausfüllung $K_{ij_1}^3$
 $(\psi_{n+1} \dots \psi_{n+1}, \hat{S}_1(i, j_1, n-2, n-1, n) \gamma^n, B_{ij_1}, \alpha_{ij_1+1},$
 $, K_{ij_1}^2 \varepsilon^{n+1})$ mit Ausfüllung $K_{ij_1}^4$

Für die Simplexe $\hat{T}(i, j_1, n-2, n, n+1) = K_{ij_1}^3 \varepsilon^{n+2}$ und

$\hat{T}(i, j_1, n-1, n, n+1) = K_{ij_1}^4 \varepsilon^{n+2}$ gilt dann

Seiten	$\hat{T}(i, j_1, n-2, n, n+1)$	$\hat{T}(i, j_1, n-1, n, n+1)$
n+1	$\hat{S}_2(i, 1, n-2, n-2, n-1)^{n-1}$	$\hat{T}(i, 1, n-1, n-1, n)$
n	$\hat{S}_2(i, j_1, n-2, n-1, n)$	$\hat{T}(i, j_1+1, n-1, n-1, n)$
n-1	$B_{ij_1} \varepsilon^{n+1}$	$B_{ij_1} \varepsilon^{n+1}$
n-2	$\hat{T}(i, j_1, n-1, n-1, n)$	$\hat{S}_1(i, j_1, n-2, n-1, n)$
i	Ψ_n	Ψ_n

$i \leq n-2$

Folgerung: Die Behauptung von Lemma (12.6) lässt sich nun folgendermassen formulieren: Zwei Repräsentanten $\hat{\varphi}_1 \in \alpha_1$ und $\hat{\varphi}_2 \in \alpha_2$ entsprechend Lemma (12.5) sind homotop d.u.n.d., wenn ein Paar $(\hat{T}(1, 1, n-1, n, n+1) \dots$

$\dots \hat{T}(r, 1, n-1, n, n+1), (\hat{T}(r+1, 1, n-1, n, n+1) \dots$

$\dots \hat{T}(r+1, p_1-1, n-1, n, n+1)) \dots (\hat{T}(r+s, 1, n-1, n, n+1) \dots$

$\dots \hat{T}(r+s, p_s-1, n-1, n, n+1)))$ und

$(\hat{T}(1, 1, n-2, n, n+1) \dots \hat{T}(r, 1, n-2, n, n+1), (\hat{T}(r+1, 1, n-2, n, n+1) \dots$

$\dots \hat{T}(r+1, p_1-1, n-2, n, n+1)), \dots, (\hat{T}(r+s, 1, n-2, n, n+1) \dots$

$\dots \hat{T}(r+s, p_s-1, n-2, n, n+1)))$

existiert mit den oben gegebenen Seitenbedingungen.

Lemma (12.7): Es seien $\hat{\varphi}_1 \in \alpha_1$, $\hat{\varphi}_2 \in \alpha_2$ zwei Repräsentanten der Klassen $\alpha_1, \alpha_2 \in \hat{\Pi}_n(K, \Psi; G)$ entsprechend Lemma (12.5) und

$$\hat{\varphi}_\nu([i, j_1, k, l, n], \varepsilon_{n-2} \eta^k \eta^l) = \hat{S}_\nu(i, j_1, k, l, n) \quad \nu=1, 2$$

$$\hat{\varphi}_1 \circ \hat{\varphi}_2([i, j_1, k, l, n], \varepsilon_{n-2} \eta^k \eta^l) = \hat{S}(i, j_1, k, l, n).$$

Dann gilt:

$$(1) \hat{S}(i, j_1, k, l, n) = \psi_n \quad \text{für } k < l < n-1$$

$$\hat{S}(i, j_1, k, n-1, n) = \hat{S}(i, j_1, n-2, n-1, n) \varepsilon^{n-2} \varphi^k$$

$$\text{für } k < n-2$$

(2) $\hat{S}(i, j_1, n-2, n-1, n)$ ist vollständig bestimmt durch die folgenden Tütenbildungen:

(a) die $(n-2, n)$ -Tüten

$$(\psi_{n-1} \dots \psi_{n-1}, \hat{S}_1(i, j_1, n-2, n-1, n) \varepsilon^{n-2},$$

$$\hat{S}_2(i, j_1, n-2, n-1, n) \varepsilon^{n-2} \psi_{n-1})$$

mit Ausfüllungen $\hat{\Gamma}(i, j_1, n-1, n-1, n)$ für

$$i=1, \dots, r+s \quad j_1=1, \dots, p_1-1$$

(b) die $(n-1, n+1)$ -Tüten

$$(\psi_n \dots \psi_n, \hat{S}_1(i, j_1, n-2, n-1, n) \varepsilon^{n-2} \varphi^{n-3},$$

$$\hat{\Gamma}(i, j_1, n-1, n-1, n), \hat{S}_2(i, j_1, n-2, n-1, n),$$

$$\hat{S}_2(i, j_1, n-2, n-1, n) \varepsilon^{n-2} \varphi^{n-1})$$

mit Ausfüllungen $\hat{\Gamma}(i, j_1, n-2, n, n+1)$

(c) die $(n-2, n+1)$ -Tüten

$$(\psi_n \dots \psi_n, \hat{S}_1(i, j_1, n-2, n-1, n), \hat{\Gamma}(i, j_1, n-2, n, n+1) \xi^{n-1},$$

$$\hat{\Gamma}(i, j_1+1, n-1, n-1, n), \hat{\Gamma}(i, 1, n-1, n-1, n))$$

mit Ausfüllungen $\hat{\Gamma}(i, j_1, n-1, n, n+1)$

und zwar gilt:

$$\hat{S}(i, j_1, n-2, n-1, n) = \hat{\Gamma}(i, j_1, n-1, n, n+1) \varepsilon^{n-2}$$

Beweis: Ist $\hat{\psi}_1 \circ \hat{\psi}_2 = \hat{\chi} \varepsilon^{n-2}$ für eine gewisse Ausfüllung $\hat{\chi}$ der $(n-2, n-1)$ -Tüte

$(\hat{\psi}_{n-2} \dots \hat{\psi}_{n-2}, \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2)$ in $K^{P(G,2)}$, so ist die c.s.s.-Abbildung $\hat{\gamma}: P(G,2) \times \Delta [n-1] \longrightarrow K$ wieder vollständig bestimmt durch die Bilder

$$\hat{\gamma}([i, j_i, k, l, n+1], \varepsilon_{n-1} \gamma^k \gamma^l) = \hat{\Gamma}(i, j_i, k, l, n+1)$$

für $i = 1, \dots, r+s$

$$j_i = 1, \dots, p_i - 1$$

$$0 \leq k < l < n+1$$

Bezeichnet man ausserdem mit

$$\hat{\Gamma}(i, j_i, a, b, n) = \begin{cases} \hat{\gamma}([i, j_i, a, b, n], \varepsilon_{n-1} \gamma^a) & a \leq b \\ \hat{\gamma}([i, j_i, b, a, n], \varepsilon_{n-1} \gamma^a) & a > b \end{cases}$$

so ergeben sich für die Seiten von $\hat{\Gamma}(i, j_i, k, l, n+1)$

die folgenden Forderungen: (alle nicht aufgeführten Seiten sind gleich ψ_n zu setzen)

(1) $k < l < n-1$

Seiten	$\hat{\Gamma}(i, j_i, k, l, n+1)$	
$n+1$	$\hat{S}_2(i, j_i, k, l, n) = \psi_n$	
n	$\hat{S}(i, j_i, k, l, n)$	
$n-1$	$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_1(i, j_i, k, l, n) = \psi_n \\ \hat{\Gamma}(i, j_i, k, n-2, n) \end{array} \right.$	$n-1 > l+1$ $n-1 = l+1$
$l+1$	$\hat{\Gamma}(i, j_i, k, l, n)$	$l+1 < n-1$
l	$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Gamma}(i, j_i, k, l-1, n) \\ \hat{\Gamma}(i, j_i+1, k, k, n) \end{array} \right.$	$l > k+1$ $l = k+1$
$k+1$	$\hat{\Gamma}(i, j_i, l-1, k, n)$	$k+1 < l$

Seiten	$\hat{\Gamma}(i, j_1, k, l, n+1)$	
k	$\begin{cases} \hat{\Gamma}(i, j_1, l-1, k-1, n) & k > 0 \\ \hat{\Gamma}(i, j_1, l-1, l-1, n) & k = 0 \end{cases}$	

(2) $k = n-3, l = n-1$

Seiten	$\hat{\Gamma}(i, j_1, k, n-1, n+1)$	
n+1	$\hat{S}_2(i, j_1, k, n-1, n) = \hat{S}_2(i, j_1, n-2, n-1, n) \varepsilon^{n-2} \gamma^k$	
n	$\hat{\Gamma}(i, j_1, k, n-1, n)$	
n-1	$\hat{\Gamma}(i, j_1, k, n-2, n)$	
n-2	$\hat{S}_1(i, j_1, k, n-2, n) = H_n$	
k+1	$\hat{\Gamma}(i, j_1, n-2, k, n)$	
k	$\begin{cases} \hat{\Gamma}(i, j_1, n-2, k-1, n) & k > 0 \\ \hat{\Gamma}(i, j_1, n-2, n-2, n) & k = 0 \end{cases}$	

(3) $k = n-3, l = n-1$

Seiten	$\hat{\Gamma}(i, j_1, n-3, n-1, n+1)$	
n+1	$\hat{S}_2(i, j_1, n-3, n-1, n) = \hat{S}_2(i, j_1, n-2, n-1, n) \varepsilon^{n-2} \gamma^{n-3}$	
n	$\hat{\Gamma}(i, j_1, n-3, n-1, n)$	
n-1	$\hat{\Gamma}(i, j_1, n-3, n-2, n)$	
n-2	$\hat{\Gamma}(i, j_1, n-2, n-3, n)$	
n-3	$\hat{\Gamma}(i, j_1, n-2, n-4, n)$	

(4) $k = n-2, l = n-1$

Seiten	$\hat{\Gamma}(i, j_1, n-2, n-1, n+1)$	
n+1	$\hat{S}_2(i, j_1, n-2, n-1, n)$	
n	$\hat{\Gamma}(i, j_1, n-2, n-1, n)$	
n-1	$\hat{\Gamma}(i, j_1+1, n-2, n-2, n)$	
n-2	$\hat{\Gamma}(i, j_1, n-2, n-3, n)$	

$$(5) \quad k < n-3, \quad l = n$$

Seiten	$\hat{\Gamma}(i, j_i, k, n, n+1)$	
n+1	$\hat{\Gamma}(i, 1, k, k, n)$	
n	$\hat{\Gamma}(i, j_i, k, n-1, n)$	
n-1	$\hat{S}(i, j_i, k, n-1, n)$	
n-2	$\hat{S}_1(i, j_i, k, n-1, n) = \hat{S}_1(i, j_i, n-2, n-1, n) \varepsilon^{n-2} \gamma^k$	
k+1	$\hat{\Gamma}(i, j_i, n-1, k, n)$	
k	$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Gamma}(i, j_i, n-1, k-1, n) \\ \hat{\Gamma}(i, j_i, n-1, n-1, n) \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} k > 0 \\ k = 0 \end{array}$

$$(6) \quad k = n-3, \quad l = n$$

Seiten	$\hat{\Gamma}(i, j_i, n-3, n, n+1)$
n+1	$\hat{\Gamma}(i, 1, n-3, n-3, n)$
n	$\hat{\Gamma}(i, j_i, n-3, n-1, n)$
n-1	$\hat{S}(i, j_i, n-3, n-1, n)$
n-2	$\hat{\Gamma}(i, j_i, n-1, n-3, n)$
n-3	$\hat{\Gamma}(i, j_i, n-1, n-4, n)$

$$(7) \quad k = n-2, \quad l = n$$

Seiten	$\hat{\Gamma}(i, j_i, n-2, n, n+1)$	
n+1	$\hat{\Gamma}(i, 1, n-2, n-2, n)$	
n	$\hat{\Gamma}(i, j_i, n-2, n-1, n)$	
n-1	$\hat{\Gamma}(i, j_i, n-1, n-2, n)$	
n-2	$\hat{\Gamma}(i, j_i, n-1, n-3, n)$	
n-3	$\hat{S}_1(i, j_i, n-3, n-1, n) = \hat{S}_1(i, j_i, n-2, n-1, n) \varepsilon^{n-2} \gamma^{n-3}$	

$$(8) \quad k = n-1, \quad l = n$$

Seiten	$\hat{\Gamma}(i, j_1, n-1, n, n+1)$
$n+1$	$\hat{\Gamma}(i, 1, n-1, n-1, n)$
n	$\hat{\Gamma}(i, j_1+1, n-1, n-1, n)$
$n-1$	$\hat{\Gamma}(i, j_1, n-1, n-2, n)$
$n-2$	$\hat{S}(i, j_1, n-2, n-1, n)$
$n-3$	$\hat{S}_1(i, j_1, n-2, n-1, n)$

An Hand dieser Forderungen überlegt man sich leicht, dass für die Simplexe $\hat{\Gamma}(i, j_1, k, l, n+1)$ die folgenden Festsetzungen möglich sind:

$$(\alpha) \quad \hat{\Gamma}(i, j_1, k, l, n+1) = \mathcal{U}_{n+1} \quad \text{für } k < l < n-1 \\ \text{und damit } \hat{S}(i, j_1, k, l, n) = \mathcal{U}_n \quad \text{für } k < l < n-1,$$

$$(\beta) \quad \hat{\Gamma}(i, j_1, k, n-1, n+1) = \hat{S}_2(i, j_1, n-2, n-1, n) \varepsilon^{n-2} \gamma^k \gamma^n \\ \text{für } k < n-2 \text{ und } \hat{\Gamma}(i, j_1, n-2, n-1, n+1) = \\ = \hat{S}_2(i, j_1, n-2, n-1, n) \gamma^n,$$

$$(\gamma) \quad \text{wählt man } \hat{\Gamma}(i, j_1, n-1, n-1, n) \text{ als Ausfüllung} \\ \text{der in (a) angegebenen } (n-2, n)\text{-Tüte, so ist} \\ \hat{\Gamma}(i, j_1, k, n, n+1) = \hat{\Gamma}(i, j_1, n-1, n-1, n) \gamma^k \\ \text{für } k < n-2 \text{ und somit } \hat{S}(i, j_1, k, n-1, n) = \\ = \hat{\Gamma}(i, j_1, n-1, n-1, n) \varepsilon^{n-1} \gamma^k \text{ für } k < n-2,$$

(δ) damit sind alle Seiten von $\hat{\Gamma}(i, j_1, n-2, n, n+1)$ festgelegt bis auf die $(n-1)$ -te und alle Seiten von $\hat{\Gamma}(i, j_1, n-1, n, n+1)$ bis auf die $(n-2)$ -te und bilden die in (b) bzw. (c) angegebenen Tüten, so dass $\hat{S}(i, j_1, n-2, n-1, n)$ in der gewünschten Weise gewonnen werden kann.

Aus den letzten drei Lemmatas gewinnt man nun leicht den folgenden Isomorphiesatz:

Satz (12.8): Ist $\hat{\psi} \in \alpha \in \hat{\pi}_n(K, \psi; G)$ ein nach Lemma (12.5)

gewählter Repräsentant der Klasse α , so definiert die Zuordnung

$$\lambda(\hat{\psi}) = (\hat{S}(1, 1, n-2, n-1, n) \dots \hat{S}(r, 1, n-2, n-1, n), \\ , (\hat{S}(r+1, 1, n-2, n-1, n) \dots \hat{S}(r+1, p_1-1, n-2, n-1, n)), \dots \\ \dots, (\hat{S}(r+s, 1, n-2, n-1, n) \dots \hat{S}(r+s, p_s-1, n-2, n-1, n)))$$

mit $\hat{S}(i, j_i, n-2, n-1, n) = \hat{\psi}([i, j_i, n-2, n-1, n], \epsilon_{n-2} \gamma^{n-2} \gamma^{n-1})$

einen natürlichen Isomorphismus

$$\lambda_* : \hat{\pi}_n(K, \psi; G) \cong \pi_n(K, \psi; G)$$

Beweis: (1) Nach Lemma (12.5) ist λ eine Abbildung von

$$\Gamma_{n-2}(K^{P(G, 2)}, \hat{\psi}) \text{ auf } \Gamma_{n-2}(K([r]; p_1, \dots, p_s), \bar{\psi}).$$

(2) Wegen Lemma (12.6) und Lemma (2.5) erzeugt λ eine eindeutige Beziehung der Homotopie-klassen.

(3) Wegen Lemma (12.7) und Lemma (2.4) ist λ_* ein Homomorphismus.

(4) Da λ_* durch die Wahl eines speziellen Repräsentanten bestimmt ist, überlegt man sich leicht, dass für jede c.s.s.-Abbildung f von (K, ψ) nach (L, ϕ) die Gleichung $\lambda_* \cdot f_* = f_* \cdot \lambda_*$ gilt, d.h. dass λ_* natürlich ist.

Literaturverzeichnis

- [1] V.K.A.M.Gugenheim
On Supercomplexes
Trans.Amer.Math.Soc. 85(1957); 35-51
- [2] D.M.Kan
A Combinatorial Definition of Homotopy Groups
Ann.Math. 67(1958); 282-312
- [3] D.M.Kan
On Homotopy Theory and c.s.s.-Groups
Ann.Math. 68(1958); 38-53
- [4] Y.Katuta
Homotopy Groups with Coefficients
Sc.Rep.,Tokyo Kyoiku Daigaku 7(1960),Nos.168-169;5-24
- [5] A.G.Kurosch
Gruppentheorie
Akademie-Verlag Berlin (1953)
- [6] J.C.Moore
Homotopie des complexes monoideaux I
Séminaire Henri Cartan (1954-1955)
- [7] B.Eckmann und P.J.Hilton
Groupes d'homotopie et dualité.Coefficients
C.R.Acad.Sci.Paris 246(1958); 2991-2993

- [8] B.Eckmann und P.J.Hilton
Transgression homotopique et cohomologique
C.R.Acad.Sci.Paris 247(;958); 620-623
- [9] S.-T.Hu
Homotopy Theory
Academic Press New York and London (1959)

Lebenslauf

Am 1. Mai 1933 wurde ich in Berlin-Charlottenburg als Tochter des Kaufmanns Kurt-Fritz Kurth und seiner Ehefrau Margarete, geb. Sechehay, geboren.

Bis 1943 lebten wir in Berlin, wo ich ab 1939 die Volksschule besuchte. 1943 wurde ich mit meiner Mutter in das Oderbruch evakuiert und war dort bis Dezember 1944 Schülerin der Städtischen Oberschule für Jungen in Wriezen.

Ende Januar 1945 flüchteten wir nach Lüneburg. Dort besuchte ich von 1946 bis 1950 die Staatliche Wilhelm-Raabe-Schule und ging dann an die Odenwaldschule in Oberhambach/Bergstrasse. Am 22.2.1952 habe ich dort die Reifeprüfung bestanden.

Vom Sommer-Semester 1952 bis zum Sommer-Semester 1955 studierte ich Mathematik an der Universität Hamburg und legte dort am 26.7.1955 die Diplom-Vorprüfung in Mathematik ab.

Im Winter-Semester 1955/56 kam ich an die Johann-Wolfgang-Goethe-Universität Frankfurt am Main, wo ich am 28.7.1959 die Diplom-Hauptprüfung für das Fach Mathematik mit den Nebenfächern Angewandte Mathematik und Mathematische Nationalökonomie bestand. Das Thema meiner Diplomarbeit lautete "Die Invarianz der Stiefel-Whitney-Klassen" und wurde mir von Herrn Prof. Dr. W. Franz gestellt.

Vom 1.6.1957 bis zum 31.10.1959 war ich wissenschaftliche Hilfskraft und seitdem Verwalterin einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Mathematischen Seminar in Frankfurt am Main.

Meine Beschäftigung mit der mathematischen Nationalökonomie begann im Sommer-Semester 1958 in einer Arbeitsgemeinschaft bei Herrn Prof.Dr.E.Burger und wurde fortgesetzt in Arbeitsgemeinschaften und Seminaren bei Herrn Privatdozenten Dr.F.W.Bauer. Ferner habe ich 1959 für Herrn Prof.Dr.G.Menges im Rahmen eines Forschungsauftrages eine wissenschaftliche Arbeit auf Empfehlung von Herrn Prof.Dr.H.Sauermann durchgeführt.

Die vorliegende Dissertation fertigte ich auf Anregung von Herrn Privatdozenten Dr.F.W.Bauer an.

Meine wissenschaftliche Ausbildung habe ich in Vorlesungen und Seminaren bei Frau Prof.Dr.R.Moufang, Herrn Prof.Dr.R.Baer, Herrn Prof.Dr.E.Burger und besonders im Topologischen Seminar von Herrn Prof. Dr.W.Franz und Herrn Privatdozenten Dr.F.W.Bauer erhalten.

Allen meinen akademischen Lehrern, besonders Herrn Prof.Dr.W.Franz, möchte ich auf diesem Wege für die mir zuteil gewordene Förderung meinen Dank aussprechen.

Frankfurt am Main, den 25.4.1963

